開方通釋

開方通釋叙

平方求積之法見於王制方十里者爲方一里者百是也開平方之法見於逸周書制郊甸方六百里因西土爲方千里是也立方求積之法見於考工記㮚人爲量深尺內方尺其實一鬴是也開立方之法亦見於考工記旊人爲簋其實一觳崇尺是也算學之書汗牛充棟莫不以開方爲大法故九數之中方田粟米商功勾股四者之精義反覆相究統於少廣一章有明算學中衰三乘之方無能排解自宣城梅徵君文鼎發明廉率立成之圖三乘以上之形體始如門山掌果至於帶縱之方有舉多少而分正負者則不外乎同名相加異名相

減二一術而自宋秦道古九韶元李欒城冶而後至今學有能綜其條理者吾友元和李尙之銳江都焦里堂循各立天元一術於古開方法皆有所發明近晤陽城張司馬敦仁請其緝古算經細草與尙之里堂相頡頏三君子之用力於古也深矣里堂既爲諸乘方圖及天元一釋茲復本秦道古數學九章爲開方通釋以秦氏之旨闡古開方之術可謂無遺矣獲請於邗江之上爲之序而歸之若夫借根益實後人損之又損之道萊有成書不必與此術高下也嘉慶六年九月朔歙縣汪萊叙

開方通釋

江都[illegible]

梅勿菴少廣拾遺發明諸乘方於正負無而未備故其廉隅繁瑣步算既艱亦且莫適於用術向爲加減乘除釋於此欲貫而通之反覆再三猶未得立法之要近來因講明天元一術於金山文淙閣借得秦道古數學九章原名數學大略其中用開方法既精且簡不特與測圓海鏡相表裏究其原實古九章之遺焉嘉慶庚申冬十一月與元和李尚之同客武林節署共論及此尚之亦志求古於是法尤探好而獨信相約廣爲傳播俾古學大著於海內時江甯談

階平教諭亦客督學劉侍郎幕中時過余寓舍互相
證訂甚獲朋友講習之益竊謂乘除之法負販皆知
至開正負帶從諸乘方儒者竭精敝神或有未能了
了者使知道古此法則自一乘以至百乘千乘庶幾
一以貫通人人可以布筭而求也列爲十二式設問
以明之欲便於初學故不厭詳爾

實
方上實下法

實
方隅一乘方

實
方廉隅二乘方

實
方廉廉隅三乘方

實
方廉廉廉隅四乘方

實方廉廉廉廉隅五乘方

實方廉廉廉廉廉隅六乘方

實方廉廉廉廉廉廉隅七乘方

實方廉廉廉廉廉廉廉隅八乘方

實方廉廉廉廉廉廉廉廉隅九乘方

右都式

式一

實方

實○隅

實○○隅

實○○○隅

實○○○○隅

實○○○○○隅

實○○○○○○隅

實○○○○○○○隅

實○○○○○○○○隅

實○○○○○○○○○隅

式二

右開方無從者故諸廉無數而必存其空位者以備商生之遞入也九章開方術云置積爲實借一算步之置積爲實即此式之實也借一算步之即此式之隅也有一位即有一乘故一廉即一乘方

二廉即二一乘方三廉即三乘方四廉即四乘方五廉即五乘方六廉即六乘方七廉即七乘方八廉即八乘方九廉即九乘方測圓海鏡之式實在下隅在上諸乘之位了然益古演段與數學九章皆實在上隅在下自隅起算上達於方以便與實相消故也隅遞加至方逐位相生九入則是九乘八入則是八乘相入相生之閒精甚亦簡甚也

假如積九隅一開一乘方得幾何答曰得三

商實〇隅

|||〇|

一乘入商

實盡方隅

𝍧𝍢𝍠

假如積五百十二隅一開三乘方得幾何答曰得

四

商實〇〇〇隅

𝍤𝍡　𝍡

𝍣一

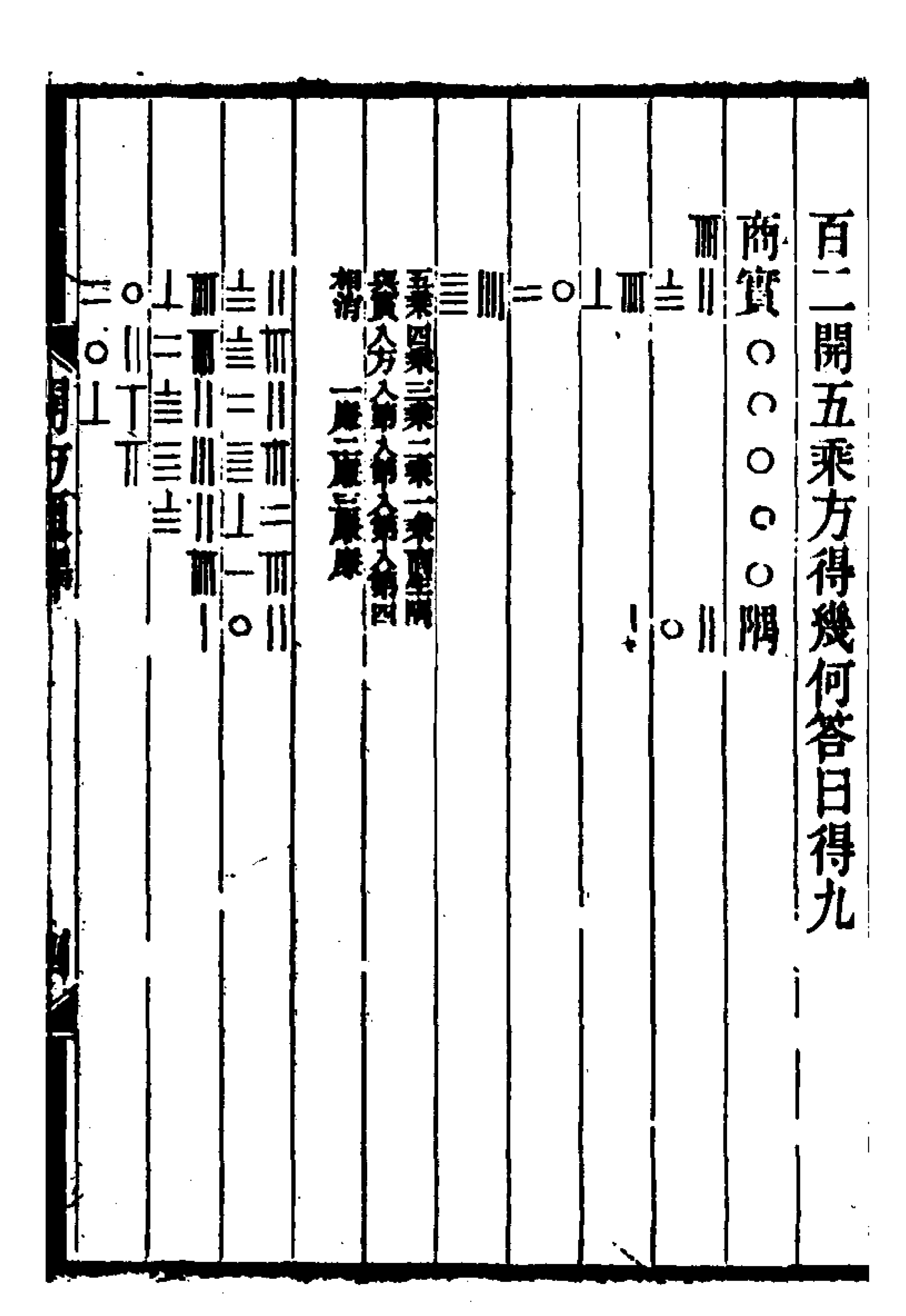
三乘二乘一乘商生隅
實入方入上入下廉
相消　廉

𝍡𝍦𝍡𝍧𝍡

一二三

𝍤𝍠

假如積五千四百二十萬六八千九百八十二隅一



百二一開五乘方得幾何答曰得九

商

實○○○○○隅

五乘四乘三乘二乘一乘商隅

發實入方入第入第入第入第四

相消一廉二廉三廉廉

|||| T 三

實方

實○隅

實方○隅

實○廉○隅

實方○廉○隅

實○廉○廉○隅

實方○廉○廉○隅

實○廉○廉○廉○隅

實方○廉○廉○廉○隅

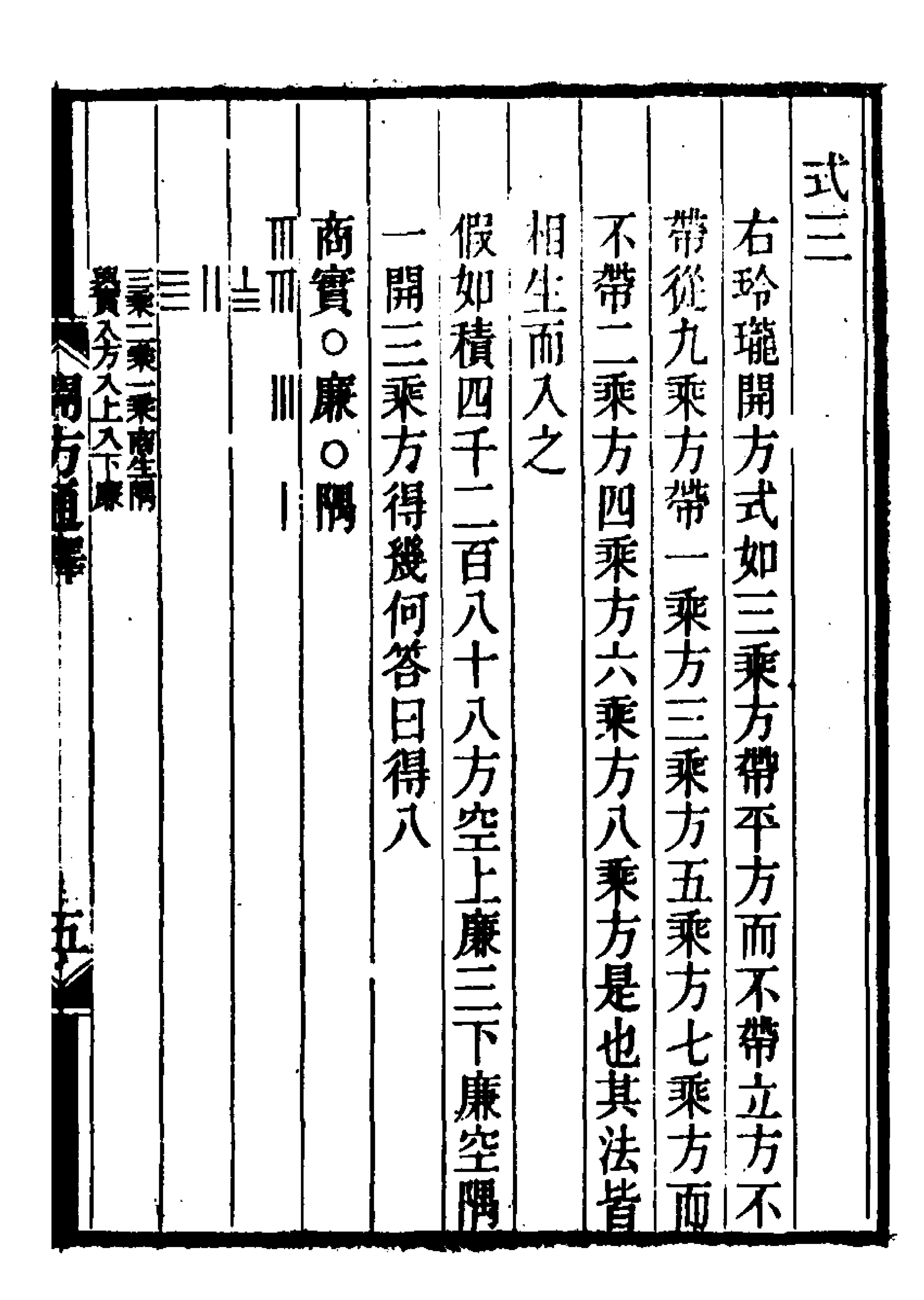
實○廉○廉○廉○廉○隅

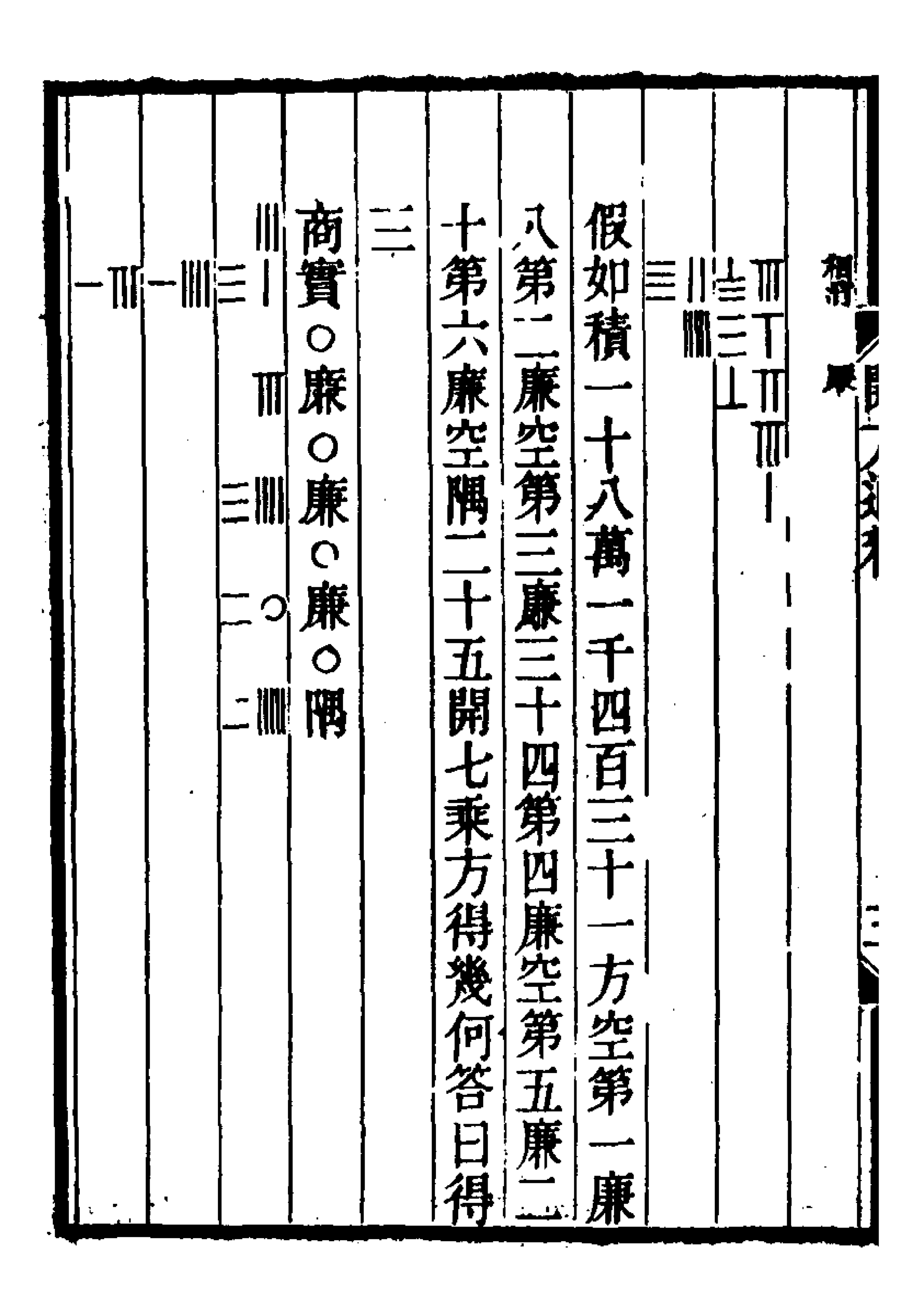
式二

右玲瓏開方式如三乘方帶平方而不帶立方不帶從九乘方帶一乘方三乘方五乘方七乘方而不帶二乘方四乘方六乘方八乘方是也其法皆相生而入之

假如積四千二百八十八方空上廉三下廉空隅一開三乘方得幾何答曰得八

商實○廉○隅





積

廉

假如積一十八萬一千四百三十一方空第一廉八第二廉空第三廉三十四第四廉空第五廉二十第六廉空隅二十五開七乘方得幾何答曰得三

商實○廉○廉○廉○隅

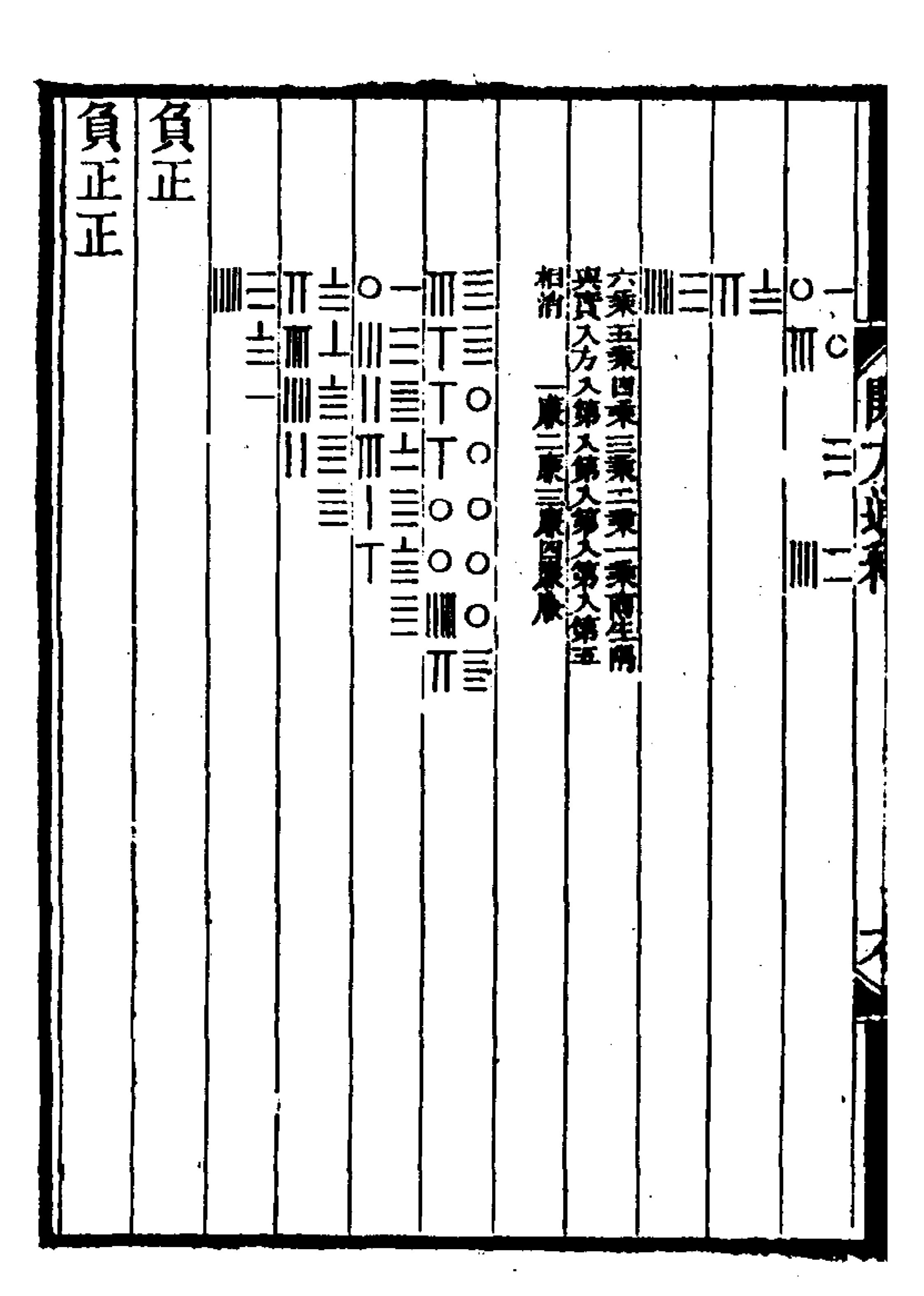
七乘六乘五乘四乘三乘二乘一乘商生隅
與實入方入第入第入第入第入第六
相消　一廉二廉三廉四廉五廉廉

丨𝍦𝍧𝍦𝍧𝍤𝍤𝍤𝍤
𝍫𝍯𝍬𝍩𝍫𝍫𝍬𝍯𝍪
𝍣𝍣丨𝍦𝍡𝍦𝍡
𝍩〇〇𝍮𝍪
𝍧𝍥𝍡
𝍩

假如積五百三十七萬八千一十八又四分方八百四分第一廉空第二廉三十六第三廉空第四廉四百二十第五廉空隅七又五分開六乘方得幾何答曰得六

商實方〇廉〇廉〇隅

〇𝍬𝍬　　　𝍬
𝍥𝍨〇𝍥〇𝍦


六乘五乘四乘三乘二乘一乘商生兩
與實入方入第一廉入第二廉入第三廉入第四廉入第五廉
相消
負正
負正正

負正正

負正正正

負正正正正

負正正正正正

負正正正正正正

負正正正正正正正

負正正正正正正正正

負正正正正正正正正正

負正正正正正正正正正正

式四

右正負式術云商常爲正正實常爲負從常爲正益常爲負此負在實其下方廉隅皆正則開方常法

也自隅而上至方皆正故皆同名相入方與實一
正一負異名相消故如等乘之至末相消而盡也
蓋秦氏此術全在以正負分同異商生隅而上行
遇同則入遇異則消相入則正仍為正負仍為負
相消則減餘在正為正在負為負守此例以行之
無往而不自得也李尚之云于術商常為正又正
負同名相乘所得為正異名相乘所得為負故商
生從隅凡從隅為正者以商正乘之是為同名所
得為正凡從隅為負者以商正乘之是為異名所
得為負也

負正

負負正

負負負正

負負負負正

負負負負負正

負負負負負負正

負負負負負負負正

負負負負負負負負正

負負負負負負負負負正

負負負負負負負負負負正

式五

右正在開為異名實方廉皆負為同名正負相消

餘必在正雖至負方减餘仍在正隅故以一正上

消諸負消一度餘仍在正仍得正則仍異名相消

轉轉消至於實而盡

假如積二十七益方六從隅一開一乘方得幾何

答曰得九

商正　實負　方負　隅正

𝍨　二𝍦　𝍥　𝍠

異商異商

消生消生

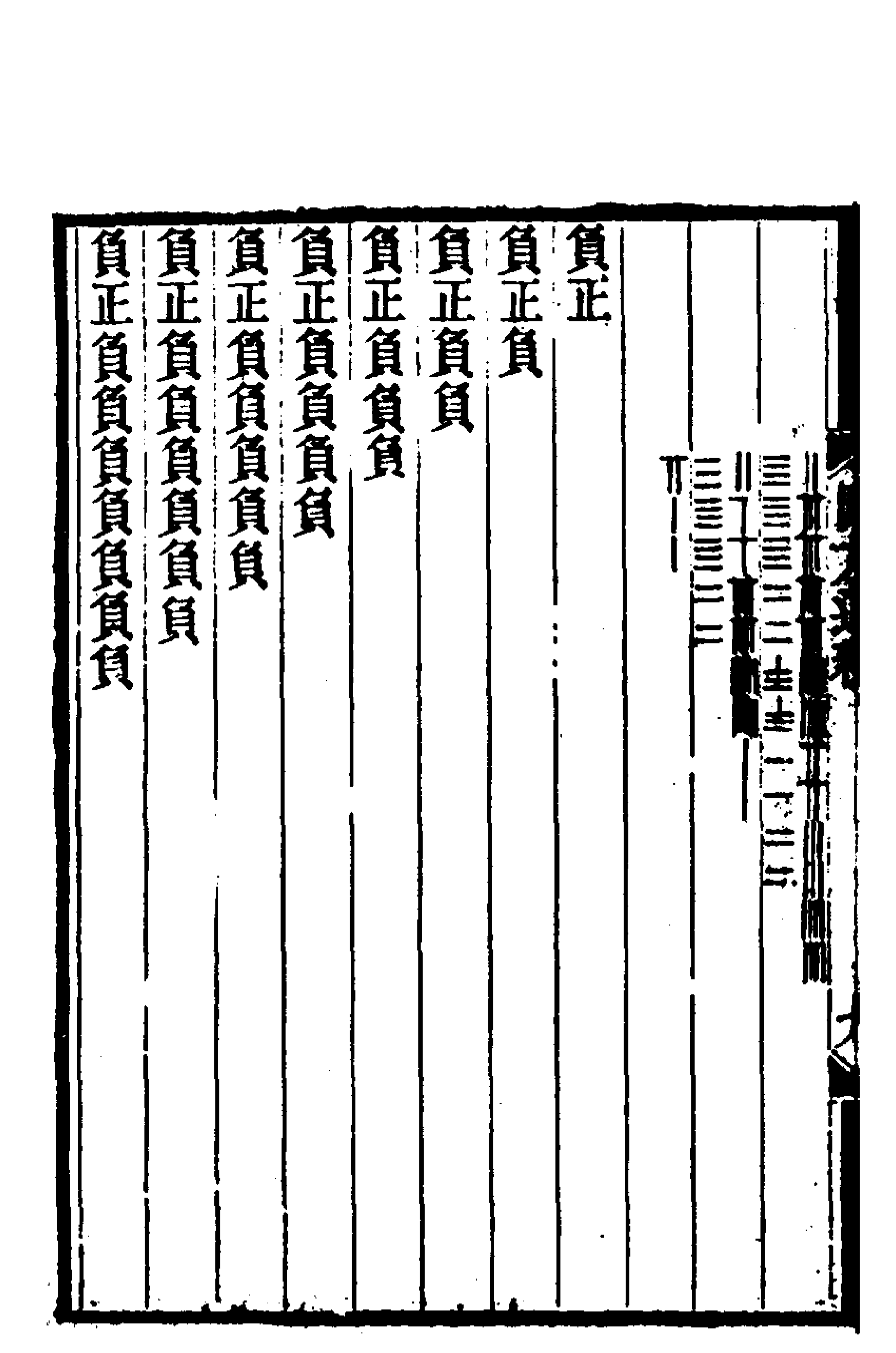
實方餘隅

盡　正

二𝍦　𝍢　𝍨　𝍠

假如積七百三十二萬四千一百一十從方第一

從廉第二從廉第三從廉第四從廉第五從廉第
六從廉第七從廉第八從廉從隅皆一開九乘方
得幾何答曰得五
商正實負方負廉負廉負廉負廉負廉負廉負廉負隅正
||||
〇二‖三‖三‖𝍤
異商異商異商異商異商異商異商異商異商異商
消生消生消生消生消生消生消生消生消生消生
實餘餘餘餘餘餘餘餘餘隅
益正正正正正正正正正



負正

負正負

負正負負

負正負負負

負正負負負負

負正負負負負負

負正負負負負負負

負正負負負負負負負

負正負負負負負負負負

負正負負負負負負負負負

式六

右正在方與實廉隅皆異名實廉隅皆同名隅而上同名相入至正方異名相消消餘必在正方仍得正與負實異名相消而盡其消餘必在正方者正方既是和數則其數已足包括諸廉及隅與實在內如立方商數二一在負廉爲一在正方則爲二在負隅爲一在負廉爲三在正方則爲九以九視三視一多已數倍在下之相生相入其勢皆足以有餘雖至九乘方負隅負廉相生者還有九層而

正方亦隨層數而增故相消之餘皆在正方也

假如積十二從方十九益廉二益隅一開三乘方得幾何答曰得三

商正　實負　方正　廉負　隅負

〣
一〢
一〩
〢
〡

異商　消生　實盡
異商　消生　方餘正
同商　加生　廉
　　　　　　隅

一〢
〣
一〩
〣
〢
〡

假如積四十九萬三千六百八從方四十七萬二千九百二十六第一益廉第二益廉第三益廉第四益廉第五益廉第六益廉第七益廉第八益廉

益隅皆一開九乘方得幾何答曰得四

商正實負方正廉負廉負廉負廉負廉負廉負廉負廉負隅負

𝍣𝍧𝍥||||||||||

〇𝍪

𝍥𝍨

𝍫𝍪

𝍧𝍦

𝍫𝍫

異商異商同商同商同商同商同商同商同商同商同商

消生消生加生加生加生加生加生加生加生加生

實方方第第第第第第第第隅

盡一二三四五六七八

廉廉廉廉廉廉廉廉

𝍧𝍡𝍤|〇𝍤𝍤|〇𝍤𝍤|〇𝍤𝍤|〇𝍤𝍤|

〇〇𝍪𝍯𝍯𝍫𝍫𝍮𝍮𝍮𝍮𝍫𝍫𝍯𝍯𝍪𝍪

𝍥𝍤𝍤𝍢𝍢𝍦𝍦𝍤𝍤𝍢𝍢𝍢𝍢

𝍫𝍫𝍯𝍮𝍮𝍩𝍩𝍫𝍫𝍩𝍩

𝍧𝍡𝍣𝍦𝍦𝍡

𝍫𝍩𝍫

負正

負正負

負負正負

負負正負負

負負負正負負

負負負正負負負

負負負負正負負負

負負負負正負負負負

負負負負負正負負負負

負負負負負負正負負負負

式七

右正在廉與正在方之例一也隨正所在減餘皆在於正與負實爲異名相消若減餘在負則與實爲同名相入是爲益積必有積商無積商者減餘必在正也

負正

負正負

負正負正

負正負正負

負正負正負正

負正負正負正負

負正負正負正負正

負正負正負正負正負

負正負正負正負正負正

負正負正負正負正負正負

式八

右正負相雜皆同則相入異則相消隨所遇以置算式有萬殊術止一例惟正負相雜則減餘或正或負變幻萬端非復原位正負之可定而加減之易淆亦惟此式爲最然益知同加異減及減餘之隨負爲負隨正爲正乃一定不易之例矣

假如積二十二益方三第一益廉一第二從廉四第三從廉二益隅一開四乘方得幾何答曰得二

商正實負方負廉負廉正廉正隅負

|| || ||| | |||| || |

二

異商異商異商　異商　此第三廉消
消生消生消生　消生　盡即以商生
實方餘第一餘第　盡隅　第二廉凡有
盡正一正二　消盡者倣此
廉　廉　式

|| 二 | 一 |||| ||| |||| || |

假如積四十五萬四百八十從方第一益廉第二
益廉第三從廉第四益廉第五益廉第六從廉從
隅皆一開七乘方得幾何答曰得五

商正實負方正廉負廉負廉正廉負廉負廉正隅正

|||| 丄○ | | | | | | | |

𝍤〇𝍤𝍫

異商同商異商異商同商異商異商同商
消生加生消生消生加生消生消生加生
實方第餘第餘第第餘第餘第隅
盡一正二正三四正五正六
廉廉廉廉廉廉

〇𝍥𝍤𝍧〇𝍣𝍤𝍠〇𝍣𝍤𝍨〇𝍥𝍤
𝍰𝍰𝍰𝍩𝍪〇〇𝍪𝍪𝍫𝍬𝍪𝍫
𝍤〇〇〇〇〇𝍥𝍥𝍦𝍧𝍠𝍠
〇〇〇𝍯𝍮𝍫𝍫
𝍤𝍨𝍧𝍠𝍠
𝍫

假如積九千六百六十九從方四第一益廉五十
五第二從廉二十八第三益廉七第四益廉三十
一從隅二十四開五乘方得幾何答曰得三

商正實負方正廉負廉正廉負廉負隅正

𝍢 𝍣 𝍢 𝍣 𝍧 𝍦 𝍠 𝍣

上 𝍫 𝍪 𝍫 𝍪

丁

𝍧

異商同商異商同商異商異商

消生加生消生加生消生消生

實盡　方　第一廉　餘正　第二廉　第三廉　餘正　第四廉　餘正　隅

𝍧 𝍣 𝍦 𝍣 𝍢 𝍥 𝍦 𝍥 𝍢 𝍡 𝍡 𝍣

𝍮 𝍪 𝍩 𝍮 𝍪 𝍮 𝍫 𝍩 𝍪 𝍫 𝍮 𝍪

𝍥 𝍡 𝍡 〇 𝍠 𝍢 𝍢 𝍠 𝍠

𝍰 𝍪 𝍫 𝍩 𝍩

假如積三十萬二千九百八十一從方九從上廉五十從下廉九百三十二益隅八開三乘方得幾何答曰得七

商正實負方正廉正廉正隅負

𝍦 𝍠 𝍣 〇 𝍡 𝍢

𝍰 𝍱 𝍫

𝍣 𝍣

𝍪

〇

𝍫

異商同商同商異商
消生加生加生消生
實方上廉下廉餘正隅
盡

𝍠 𝍢 𝍣 𝍡 𝍡 𝍥 𝍦 𝍣

𝍰 𝍰 𝍯 𝍰 𝍫 𝍯 𝍤

𝍣 𝍡 𝍡 𝍠 𝍠 𝍢

𝍪 𝍫 𝍫 𝍮 𝍮

〇 𝍣 𝍣

𝍫

實既常爲負則方以下無論幾正幾負而正之數必常處乎全負之數必常處乎不足雖商生益隅數必不敵正方正廉故減餘必在正必與實爲異名相消也

假如積四千一百四十九從方一千從上廉一百九從下廉十二益隅八開三乘方得幾何答曰得

七

商正實負方正廉正廉正隅負

𝍦𝍨〇𝍨𝍡𝍨

𝍫〇〇𝍩

𝍡〇𝍠

𝍫𝍪

異商異商異商異商

消生消生消生消生

實方餘上餘下餘隅

盡正廉負廉負

𝍨𝍦𝍢𝍨𝍧𝍢𝍥𝍨

𝍫〇𝍭𝍭〇𝍫𝍫

𝍡𝍥𝍢𝍠𝍢

𝍫〇𝍩

相消之餘初雖在負終必轉而在正蓋三正中必有一正大於商所生之負者也

商一乘二乘三乘四乘五乘六乘七乘八乘九乘

隅隅隅隅隅隅隅隅隅

單單單單單單單單單單

十百千萬十萬百萬千萬億十億百億

百	千	萬			
萬	百萬	億	常	超	一位
百萬	十億	萬億	常	超	二位
億	萬億	兆	常	超	三位
百億	千萬億	萬兆	常	超	四位
萬億	百兆	京	常	超	五位
百萬億	十萬兆	萬京	常	超	六位
兆	京	陔	常	超	七位
百兆	千京	萬陔	常	超	八位
萬兆	萬京	秭	常	超	九位

式九

右定位式爲開方要法九章開方術云借一算步之超一等注云言百之面十也言萬之面百也開立方術云借一算步之超二等注云言千之面十言百萬之面百李淳風注步之超一等者方十自乘其積有百方百自乘其積有萬借一算步之超

二零者立方求積方再自乘就積開之故超二位
孫子算經云置積二十三萬四千五百六十七步
爲實次借一算爲下法步之超一位至百而止夏
侯陽算經云開平方除借一算爲下法步之超一
算方十其積有百算方百其積有萬至百言十至
萬言百開立方除借一算爲下法步之超二位立
方十其積有千立方百其積有百萬至千言十至
百萬言百張邱建算經云置積一十二萬七千四
百四十九步於上借一算子於下常超一位步至
百止五經算術解論語千乘之國開方法云借一
算爲下法步之常超一位至萬而止循按古經開

方術均有超位之法但今可考者僅平方立方二術然由此可推諸乘方之超位也蓋商數視平實數超位視平商數商進亦進商退亦退孫子術積二十三萬四千五百六十七開立方故至百而止五經算千乘得九十億開平方故至萬而止至百萬始商千未至百萬雖九十九萬仍商百故積二十萬超位至百止也至百億始商十萬未至百億雖九十九億仍商萬故積九十億超位至萬止也

假如積八千一百隅一開一乘方得幾何答曰得九十

商 得商

實 實

方 方

隅 隅超一位

〇〇　〡　𝍢　〇〇　〇〇

〡　〡　〡

𝍢　𝍢

假如積九萬隅一開一乘方得幾何答曰得三百

商　實　方　隅

商得　實　方　隅得廉位

〇〇〇〇𝍨　〇〇〡𝍢　〇〇〇〇𝍧　〇〇〇〇〡

一乘　進一位　超一位

二乘　進一位　超一位　超二位

三乘　進一位　超一位　超二位　超三位

四乘　進一位　超一位　超二位　超三位　超四位

五乘　進一位　超一位　超二位　超三位　超四位　超五位

六乘　進一位　超一位　超二位　超三位　超四位　超五位　超六位

七乘　進一位　超一位　超二位　超三位　超四位　超五位　超六位　超七位

八乘　進一位　超一位　超二位　超三位　超四位　超五位　超六位　超七位　超八位

九乘　進一位　超一位　超二位　超三位　超四位　超五位　超六位　超七位　超八位　超九位

方　一乘　二乘　三乘　四乘　五乘　六乘　七乘　八乘　九乘

式十

右方廉隅定位式隅視商爲進退方廉隅雁行相次蓋爲九乘方則第八廉爲八乘方第七廉爲七乘方第六廉爲六乘方第五廉爲五乘方第四廉爲四乘方第三廉爲三乘方第二廉爲二乘方第

一廉爲一乘方平方止於一乘則一乘爲隅立方止於二乘則二乘爲隅以至九乘止於九乘則九乘爲隅超一位卽是進二位超三位卽是進四位古經不詳帶縱之術故止言平方超一立方超二然引而不發其機躍如乃知李欒城秦道古之學所由來而古術之精密有如此也

假如積三千方十隅一開一乘方得幾何答曰得五十

商	
實	三〇〇〇
方	一〇
隅	一

得商	[illegible]
實	三〇〇〇
方進一位	一〇〇
隅超一位	一〇〇

假如積六十三萬方二百隅一開一乘方得幾何

答曰得七百

商	實	方	隅
	⊥|||○○○○	||○○	|

商	得實	方得進二位	隅得進三位
𝍦	⊥|||○○○○	||○○○○	|○○○○

商生方加減實上實下法

商生隅入方　生方入實一乘方初商

商生隅入方一廉法變

商生隅入廉　生廉入方　生方入實二乘方初商

商生隅入廉　生廉入方二廉法變

商生隅入廉廉法二變

商生隅入下廉　生下廉入上廉　生上廉入方　生方入實三乘方初商

商生隅入下廉　生下廉入上廉　生上廉入方廉法一變

商生隅入下廉　生下廉入上廉廉法二變

商生隅入下廉廉法三變

商生隅入第三廉　生第三廉入第二廉　生第二廉入第一廉　生第一廉入方　生方入實四乘方初商

商生隅入第三廉　生第三廉入第二廉　生第二廉入第一廉　生第一廉入方廉法一變

商生隅入第三廉　生第三廉入第二廉　生第二廉

入第一廉 廉法二變

商生隅入第三廉　生第三廉入第一廉 廉法三變

商生隅入第三廉 廉法四變

商生隅入第四廉　生第四廉入第三廉　生第三廉

入第二廉　生第二廉入第一廉　生第一廉入方

生方入實 五乘方初商

商生隅入第四廉　生第四廉入第三廉　生第三廉

入第二廉　生第二廉入第一廉　生第一廉入方 廉法一變

商生隅入第四廉　生第四廉入第三廉　生第三廉

入第二廉　生第二廉入第一廉 廉法二變

商生隅入第四廉　生第四廉入第三廉　生第三廉
入第二廉廉法三變
商生隅入第四廉　生第四廉入第三廉廉法四變
商生隅入第四廉廉法五變
商生隅入第五廉　生第五廉入第四廉　生第四廉
入第三廉　生第三廉入第二廉　生第二廉入第一
廉　生第一廉入方　生方入實六乘方初商
商生隅入第五廉　生第五廉入第四廉　生第四廉
入第三廉　生第三廉入第二廉　生第二廉入第一
廉　生第一廉入方廉法一變
商生隅入第五廉　生第五廉入第四廉　生第四廉

入第三廉　生第三廉入第二廉　生第二廉入第一

廉（廉法二變）

商生隅入第五廉　生第五廉入第四廉　生第四廉

入第三廉　生第三廉入第二廉（廉法三變）

商生隅入第五廉　生第五廉入第四廉　生第四廉

入第三廉（廉法四變）

商生隅入第五廉　生第五廉入第四廉（廉法五變）

商生隅入第五廉（廉法六變）

商生隅入第六廉　生第六廉入第五廉　生第五廉

入第四廉　生第四廉入第三廉　生第三廉入第二

廉　生第二廉入第一廉　生第一廉入方　生方入

實七乘方初商

商生隅入第六廉　生第六廉入第五廉　生第五廉入第四廉　生第四廉入第三廉　生第三廉入第二廉　生第二廉入第一廉　生第一廉入方廉法一變

商生隅入第六廉　生第六廉入第五廉　生第五廉入第四廉　生第四廉入第三廉　生第三廉入第二廉　生第二廉入第一廉廉法二變

商生隅入第六廉　生第六廉入第五廉　生第五廉入第四廉　生第四廉入第三廉　生第三廉入第二廉廉法三變

商生隅入第六廉　生第六廉入第五廉　生第五廉

入第四廉　生第四廉入第三廉廉法四變
商生隅入第六廉　生第六廉入第五廉　生第五廉
入第四廉廉法五變
商生隅入第六廉　生第六廉入第五廉廉法六變
商生隅入第六廉廉法七變
商生隅入第七廉　生第七廉入第六廉　生第六廉
入第五廉　生第五廉入第四廉　生第四廉入第三
廉　生第三廉入第二廉　生第二廉入第一廉　生
第一廉入方　生方入實八乘方初商
商生隅入第七廉　生第七廉入第六廉　生第六廉
入第五廉　生第五廉入第四廉　生第四廉入第三

廉　生第三廉入第二廉　生第二廉入第一廉　生第一廉入方廉法一變

商生隅入第七廉　生第七廉入第六廉　生第六廉入第五廉　生第五廉入第四廉　生第四廉入第三廉　生第三廉入第二廉　生第二廉入第一廉廉法二變

商生隅入第七廉　生第七廉入第六廉　生第六廉入第五廉　生第五廉入第四廉　生第四廉入第三廉　生第三廉入第二廉廉法三變

商生隅入第七廉　生第七廉入第六廉　生第六廉入第五廉　生第五廉入第四廉　生第四廉入第三廉廉法四變

商生隅入第七廉　生第七廉入第六廉　生第六廉
入第五廉　生第五廉入第四廉廉法五變
商生隅入第七廉　生第七廉入第六廉　生第六廉
入第五廉廉法六變
商生隅入第七廉　生第七廉入第六廉廉法七變
商生隅入第七廉廉法八變
商生隅入第八廉　生第八廉入第七廉　生第七廉
入第六廉　生第六廉入第五廉　生第五廉入第四
廉　生第四廉入第三廉　生第三廉入第二廉　生
第二廉入第一廉　生第一廉入方　生方入實九乘方初
商

商生隅入第八廉　生第八廉入第七廉　生第七廉入第六廉　生第六廉入第五廉　生第五廉入第四廉　生第四廉入第三廉　生第三廉入第二廉　生第二廉入第一廉　生第一廉入方　廉法一變

商生隅入第八廉　生第八廉入第七廉　生第七廉入第六廉　生第六廉入第五廉　生第五廉入第四廉　生第四廉入第三廉　生第三廉入第二廉　生第二廉入第一廉　廉法二變

商生隅入第八廉　生第八廉入第七廉　生第七廉入第六廉　生第六廉入第五廉　生第五廉入第四廉　生第四廉入第三廉　生第三廉入第二廉　廉法三變

商生隅入第八廉　生第八廉入第七廉　生第七廉入第六廉　生第六廉入第五廉　生第五廉入第四廉　生第四廉入第三廉　廉法四變

商生隅入第八廉　生第八廉入第七廉　生第七廉入第六廉　生第六廉入第五廉　生第五廉入第四廉　廉法五變

商生隅入第八廉　生第八廉入第七廉　生第七廉入第六廉　生第六廉入第五廉　廉法六變

商生隅入第八廉　生第八廉入第七廉　生第七廉入第六廉　廉法七變

商生隅入第八廉　生第八廉入第七廉　廉法八變

式十一

右廉法凡初商不盡者則有廉隅方屬初商隅屬次商廉則初商次商相雜之數故初商旣消之後次商未立之先必豫立廉法廉法者先立初商之半以待次商之半也古法于平方倍方法于立方三倍方法然至三乘方以上廉愈多而算愈繁未有簡要如此法之妙也余加減乘除釋中說開方之理最詳末以甲乙明之此商生一次卽一甲次商生一次卽一乙如甲甲甲乙則商生二次留以待次商之生一次甲甲乙乙則商生一次留以待

次商之生二次二乘方三甲三乙其甲乙之交互有二色故廉有二變三乘方四甲四乙其甲乙之交互有三色故廉有三變明其理可知立法之故矣秦道古諸開方式于同加謂之入于異消亦云入某某內相消是加減均謂之入此式但以入言之至正負加減無容更贅爾

初商進一　續商退一

初商超一　續商退二

初商超二　續商退三

初商超三　續商退四

初商超四　續商退五

初商超五　續商退六

初商超六　續商退七

初商超七　續商退八

初商超八　續商退九

初商超九　續商退十

初商超一次　商位有二退一次

初商超二次　商位有三退二次

初商超三次　商位有四退三次

初商超四次　商位有五退四次

初商超五次　商位有六退五次

初商超六次　商位有七退六次

初商超七次　商位有八退七次

初商超八次　商位有九退八次

初商超九次　商位有十退九次

式十二

右退位式九章開方術云其復除折法而下復置借算布之如初開立方術云復除折而下注云開平方者方百之面十開立方者方千之面十據定法已有成方之冪故復除當以千爲百折下一等也孫子算經言次商云除訖倍方法方法一退下法再退三商云除訖倍廉法上從方法方法一退下法再退五經算術云以上商九萬以除實畢倍

方法九億爲十八億乃折之方法一折下法再折蓋有進則有退初商百宜進位爲三萬次商十自宜退位爲百矣明于進之故自了然于退之故矣退位既定以續商上生一如初商之例

秦氏于商兩次者有投胎換骨二法投胎卽益積方與實同名相加也換骨卽翻積方與實異名相消也大約和在隅乃有益積和在方乃有翻積和在隅益方大于初商則益積初商大于益方則不益積和在方較數小于初商則翻積初商小于較數則不翻積皆隨數目之多寡而自然得之非有成法也故不爲式而設題以明之

假如積七百二十從方五十四益隅一問一乘方

得幾何答曰二十四

商正　實負　方正　隅負

〇　‖　丨

ㄒ二　☰

試、變

〇　一位　二位

ㄒ二〇　☰〇　丨〇〇

商　得

異商　商異　異商

消生　消生　消生

餘方　餘隅

負　正

方實異名相消減餘

在實故不爲翻積

〇　〇　〇　〇

〇　〇

二　☰　☰　☰

丅
|||
||

異商
消生
餘隅
正

○○
三○
||
|

廉法
一變

餘負
方益
正隅
退負

實
一位
二位

○三
|||一
|

異商
異商
消生
消生

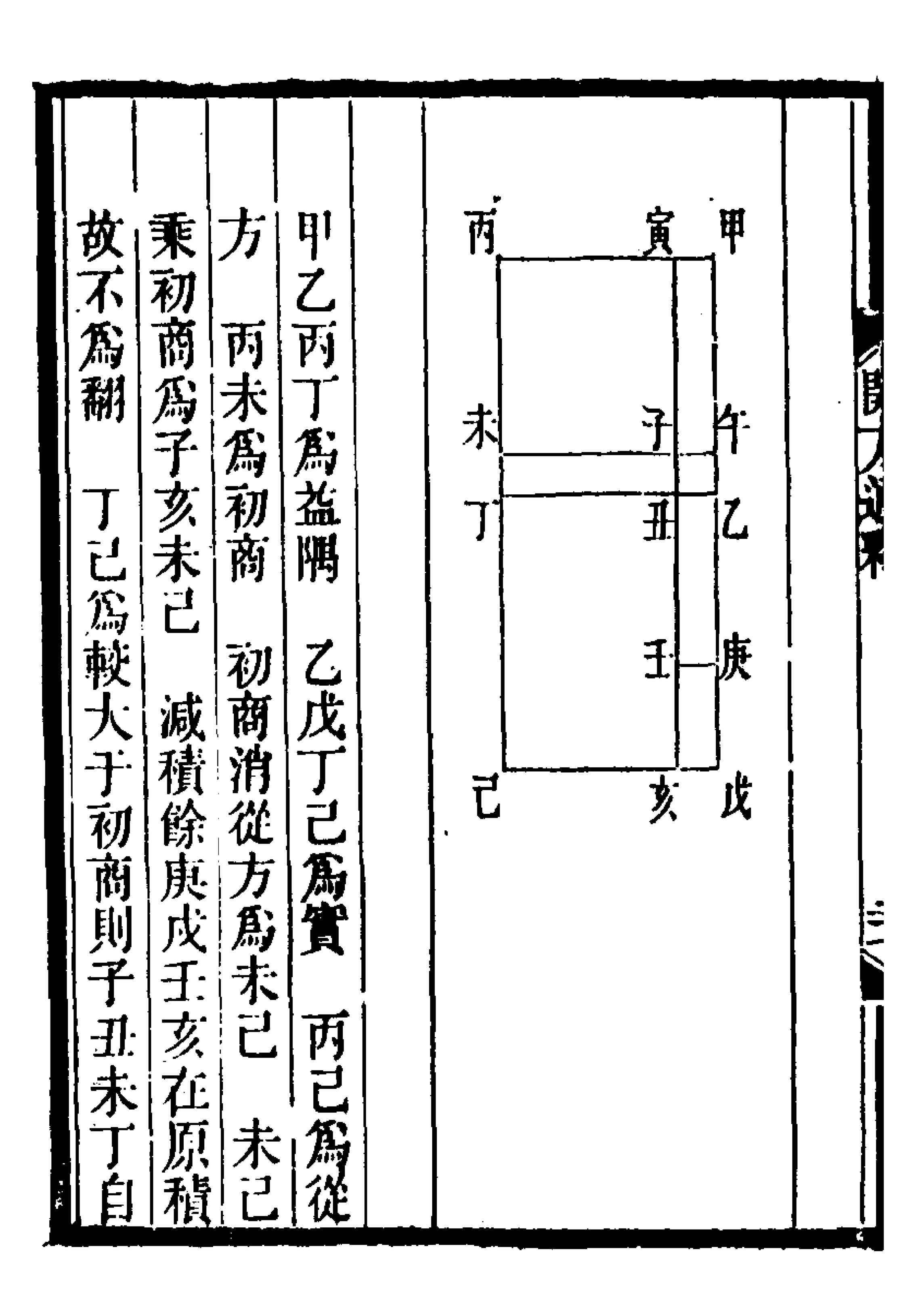
積商

實
方
餘隅
盡正

三○
一○
|||

||||

方五十四商二十四較二
十大於初商二十是爲初
商小於較數不翻積



甲乙丙丁爲益隅　乙戊丁己爲實　丙己爲從方　丙未爲初商　初商消從方爲未己　未己乘初商爲子亥未己　減積餘庚戊壬亥在原積故不爲翻　丁己爲較大于初商則子丑未丁自

小於乙戊丑亥

假如積七十二從方二十七益隅一開一乘方得幾何答曰二十四

商 正 實負 方正 隅負

⊥‖
=Ⅲ
|

實 方進一位 隅進二位

⊥‖
‖⊥○
|○○

商 異商異商 方實異名相消減餘
得 消生消生 在方故為翻積
餘方餘隅
正 正

二
⊥Ⅲ
三○
⊥○
○○

〡　〢

異商
消生
餘隅
正
○○
三○
〡〢

餘正方退一位正隅退二位負
實
〣〣〡
⊥一

廉法
一變

續
商
實方隅
盡
〤〣〢〤
⊥一

異商同商
消生加生

方二十七商二十四
較三小於初商二十
是爲初商大於較數
翻積

庚　甲　丙　壬　午　戊　辛　己　癸　未　丑　丁　子　乙

丙己丙丑益隅　己乙丑丁積　丙辛初商　丙丁從方　初商減從方餘辛丁　辛丁乘初商爲壬子辛丁　壬子辛丁大於積相消餘午未辛丑爲翻積　丑丁爲較小於丙辛、則壬癸辛丑自大於己乙癸子

假如積一百二十益方十九從隅一開一乘方得

幾何答曰二十四

商正實負方負隅正

實 丨二〇

方 一𝍫

隅 丨

實 丨二〇

方超一位 丨亖〇

隅超二位 丨〇〇

商得 丨丨

異消餘負 丨〇〇

商生方 二〇

異消餘正 一〇

商生隅 丨丨〇〇

方實異名相消不益積

同商
加生
隅
〇〇
一〇
‖‖

廉法
一變

餘負方退正隅退正
實一位二位
〇
〇
|〓||

續
商
異商同商
減生加生
實方隅
盡
|||
〇〇〓𝍫𝍫 ||||

辛 甲 子 壬 庚 丁 乙 寅 丑 卯 丙

甲乙初商大於甲丁益方相消餘丁乙以初商乘之爲寅壬乙丁在積內減積成子丑丙乙寅壬形爲次商實

假如積七十二益方二十一從隅一開一乘方得幾何答曰二十四

商正實負方負隅正

實　方遞一位　隅超一位

商得　二

同商異商
加生消生
方餘隅
負

異商
消生
餘隅
正

方實同名相加為益積

|| ||

廉法一變

益實

負方退一位

正隅退二位

正

|| |||| |

亖 一

續

異商同商

商

消生加生

實方隅

從

|||| || ||| ||||

亖 二

甲 乙 丁 丙

寅

壬

子 丑

甲乙初商小于甲丁益方相消餘乙丁以初商乘之為寅壬乙丁在積外加入子丑丁丙積數內成子丑丙乙寅壬形為次商實

測圓海鏡大股第九草消得積一千八萬從方二十一萬三千六百益廉一千二百從隅一開立方得一百二十翻法在記

商正
實負　一○○Ⅲ○○○○
方正　二丨三丅○○
廉負　一‖○○
隅正　丨

實　一〇〇Ⅲ〇〇〇〇

方算超一位　二|三丅〇〇〇〇

廉算超二位　一||〇〇〇〇〇〇

隅算超三位　|〇〇〇〇〇〇

商得　|

異消餘正　二Ⅲ〇〇〇〇

商生方　一〇三丅〇〇〇〇

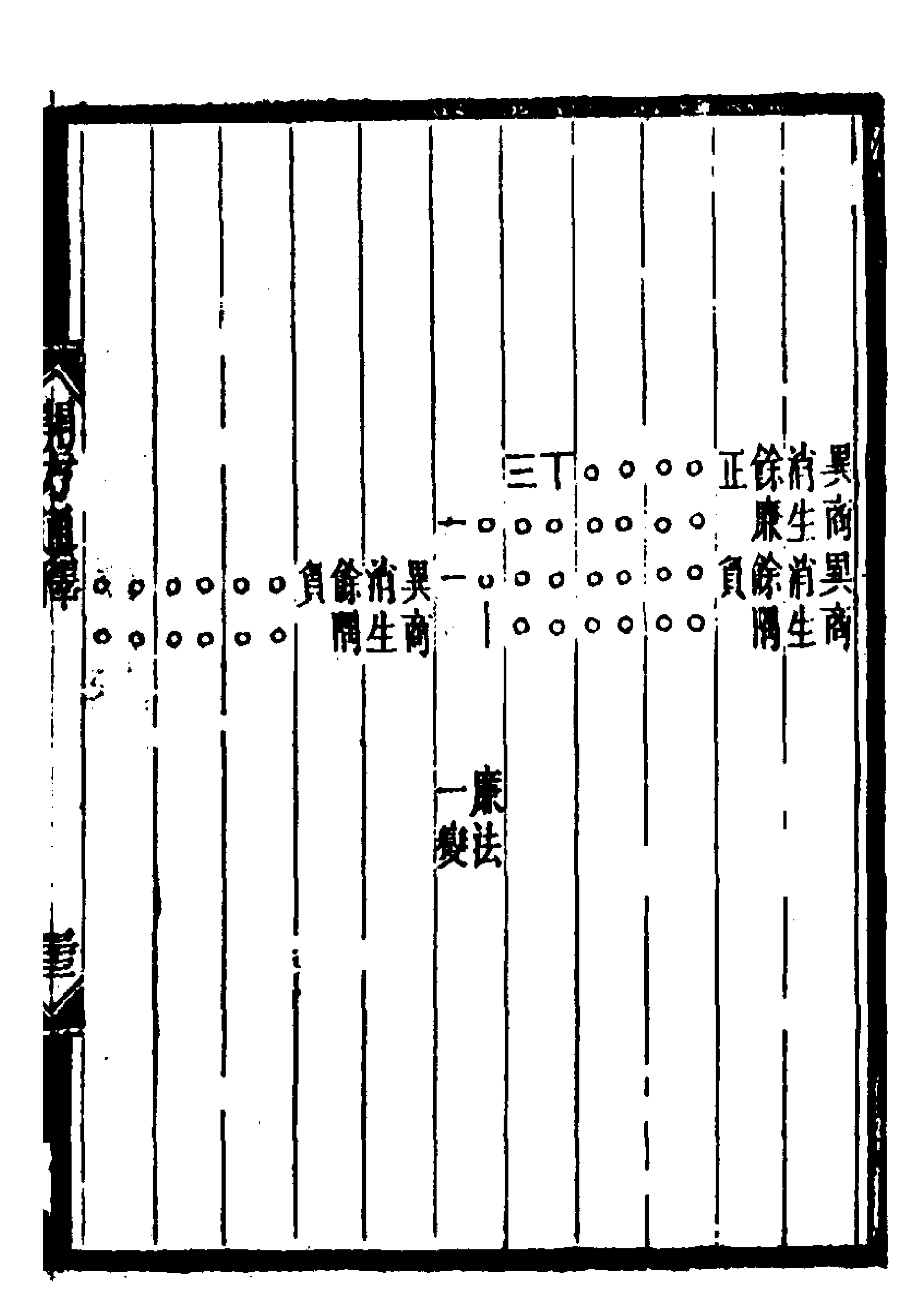
異消餘正　一〇三丅〇〇〇〇

商生廉　一|〇〇〇〇〇〇

異消餘負　一|〇〇〇〇〇〇

商生隅　|〇〇〇〇〇〇

方實相消餘在方



異
消
餘
正
商
生
廉
異
消
餘
負
商
生
隅
三丁
一
一
|
異
消
餘
負
商
生
隅
廉
法
一
變

〣一 廉法 二變

翻正方乘正廉隅負隅正

實 ○○○○丌二
一位 ○○○丄〣
二位 ○○○○亖
三位 ○○○丨

積商 二

異商消實盡 ○○○○丌二
商生方 ○○○○〣一
異消餘負 ○○○丄丌一
商生廉 ○○○亖丌
異消餘負 ○○○二
商生隅

又明東前第十草消得積五億五千三百一十九

萬四百益方四千六百四十二萬八千四百八十從上廉一百三十三萬六千三百二十八益下廉一萬五千七百九十二從隅六十三翻法開三乘方得一百二十

商負　實正　方負　廉正　廉負　隅正

李欒城正負不拘或從赤籌黑籌或從斜畫直畫正負皆以斜畫明之秦道古則實常為負從常為正益常為負今式中一依籌例商縮中仍用李書原文以見正負本可相通耳

商得

異商消餘負

商生方

異商消餘負

商生上廉

異商消餘正

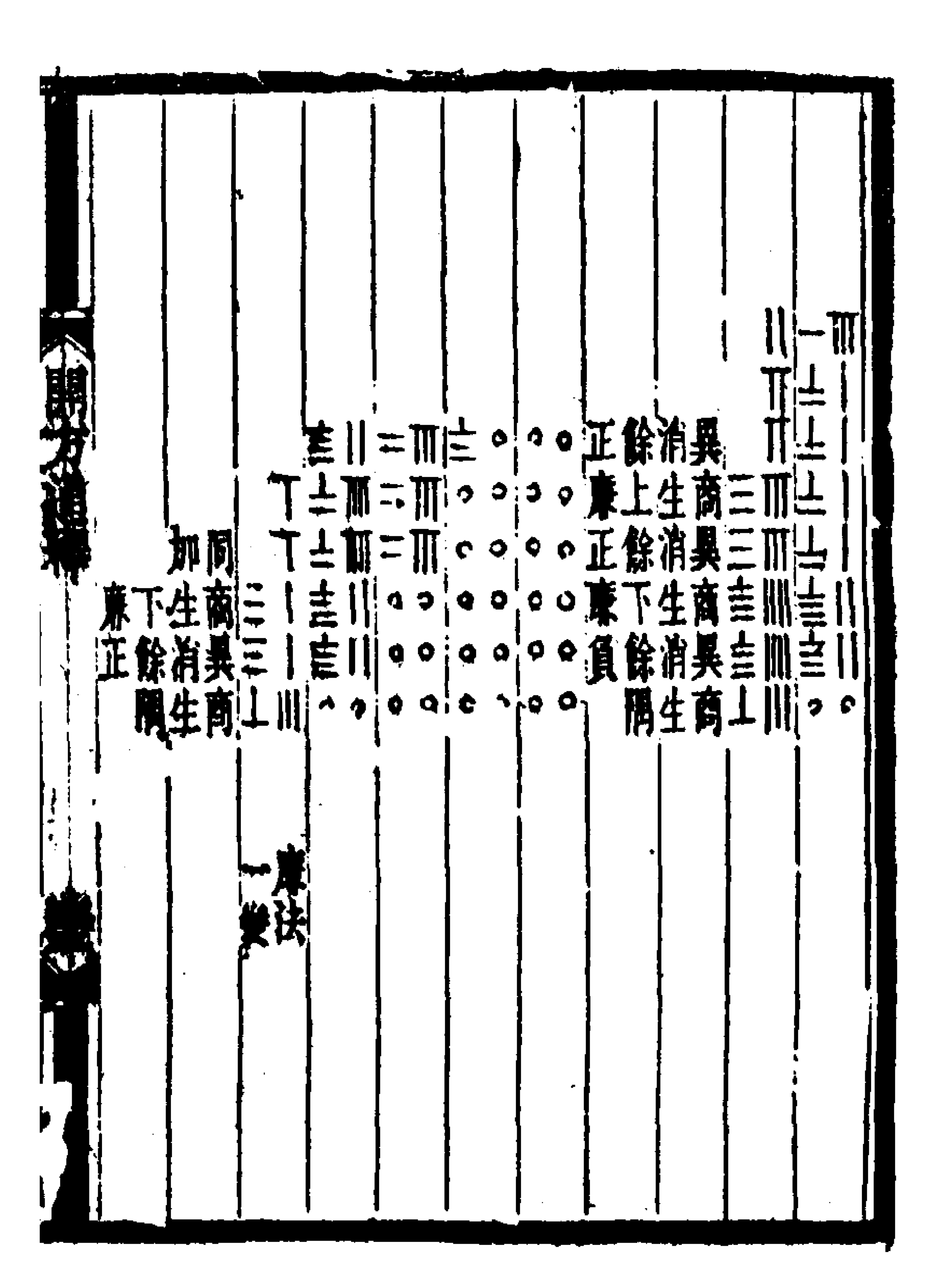
商生下廉

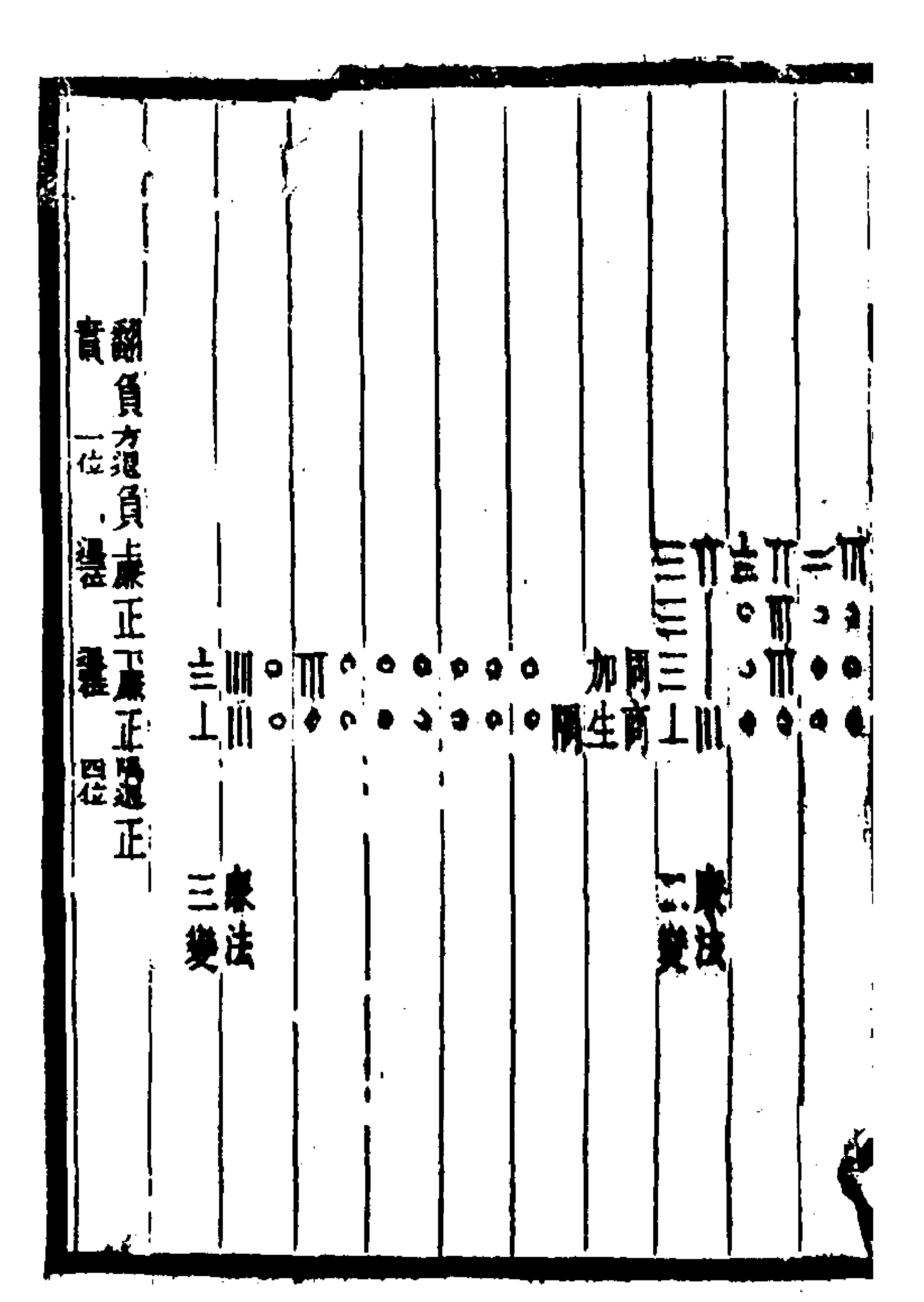
異商消餘負

商生隅

乃實與方相消恰盡

方開盡


異消餘正
商生上廉
異消餘正
商生下廉
異消餘負
商生隅
同加
商生下廉
異消餘正
商生隅
廉法一變



續商 二

異消實盡 ‖一Ⅲ三Ⅱ⊥丅〇〇

商生方 一Ⅲ三Ⅱ⊥丅〇〇

異消餘正 〇Ⅲ一Ⅲ亖Ⅲ〇〇 Ⅲ二‖亖Ⅲ〇〇

商生上廉 一Ⅲ三|⊥丅〇〇

同加 亖Ⅲ二〇亖Ⅲ〇〇 三Ⅱ亖Ⅱ二Ⅲ〇〇

商生下廉 二|三Ⅲ⊥〇〇〇

同加 一〇⊥丅亖〇〇〇 Ⅲ三〇亖〇〇〇

商生隅 |二丅〇〇〇〇 ⊥Ⅲ〇〇〇〇

又明重前第二草消得積四百六十六萬五千六百從方六十五萬二千三百二十從上廉八千六百四十下廉空益隅一益積開三乘方得一百二十

商正實負方負廉負廉空隅正

〇〇丅三丅丄𝍣

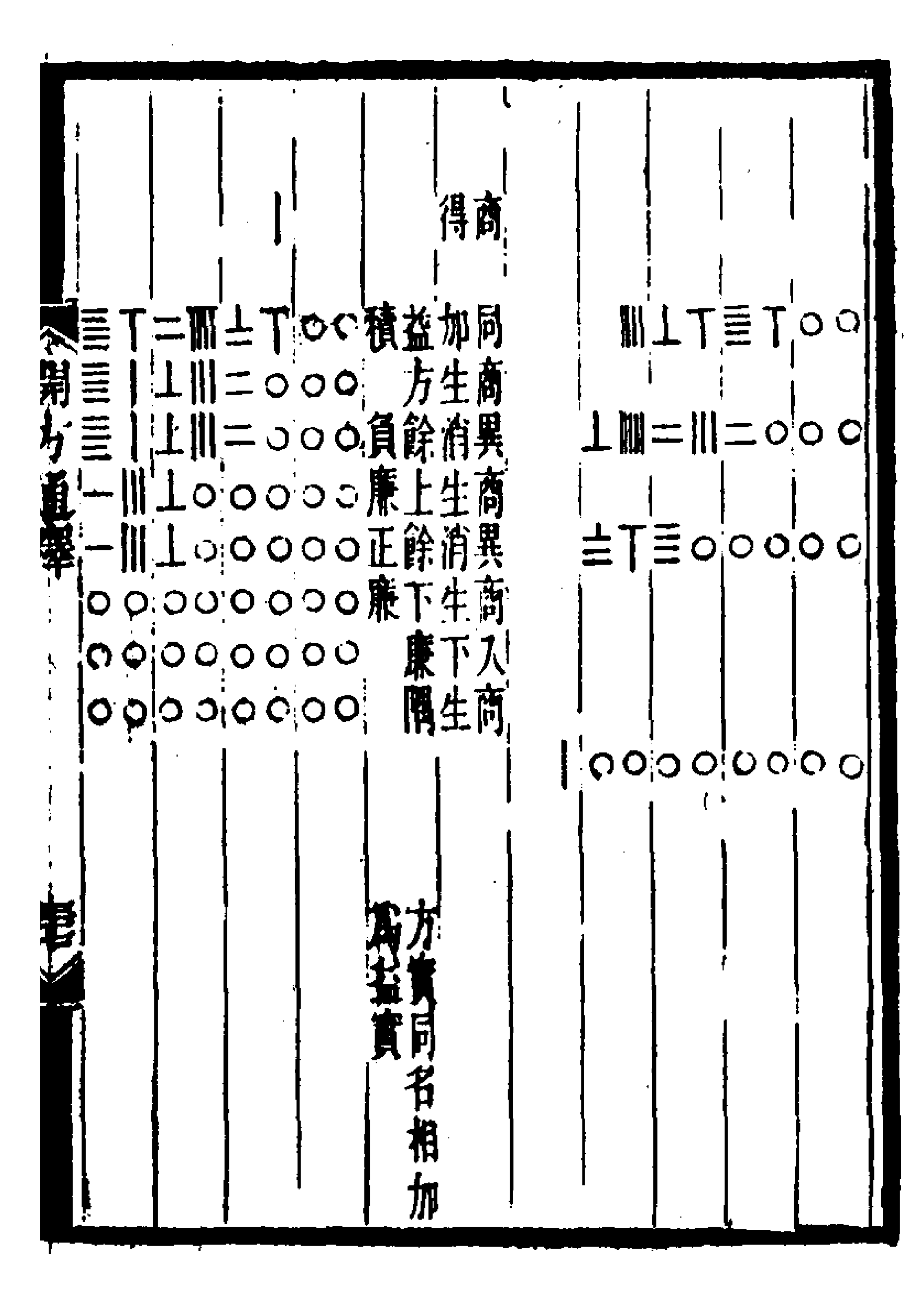
二〇二𝍢二𝍤丄

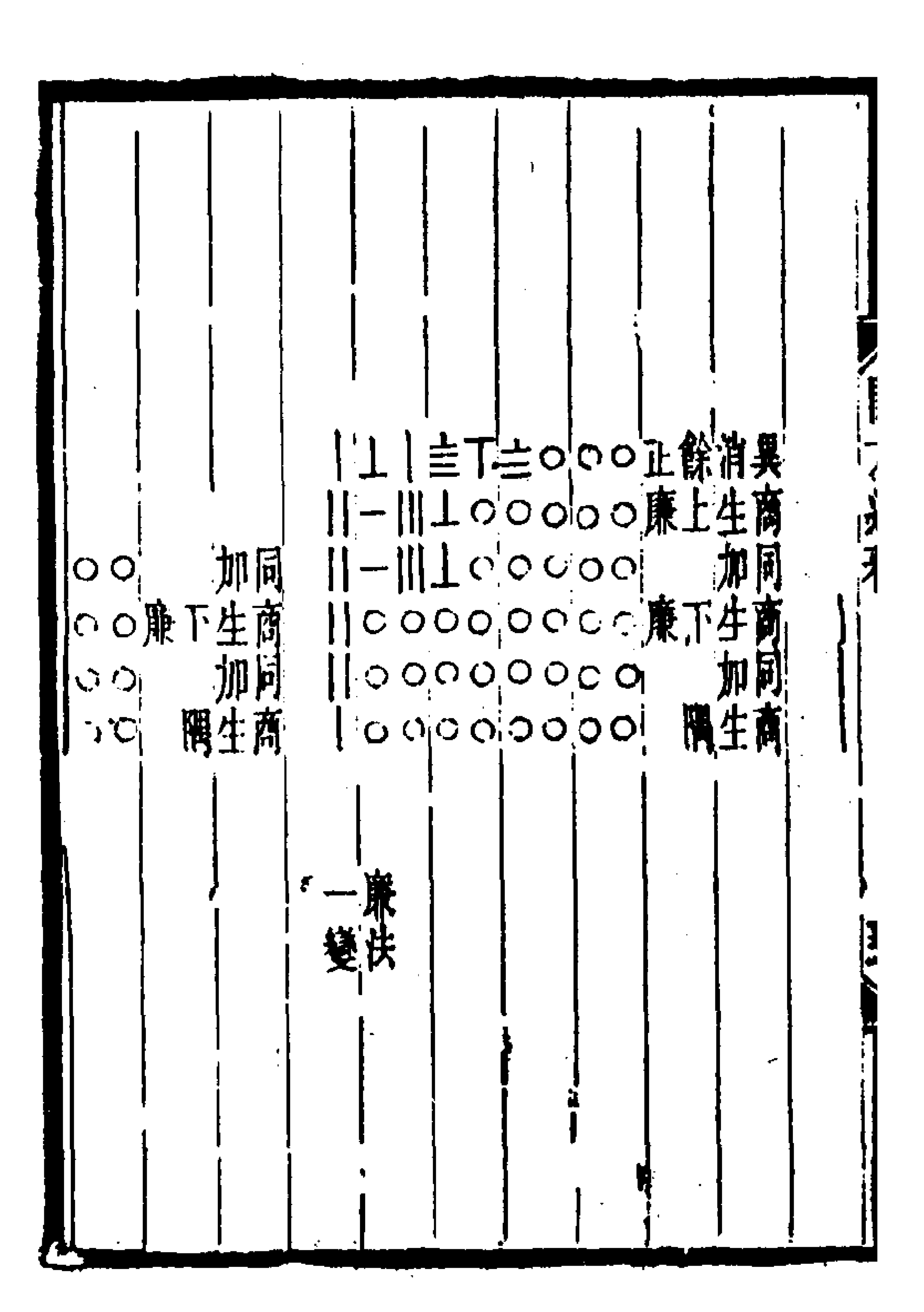
〇三丅𝍫

〇

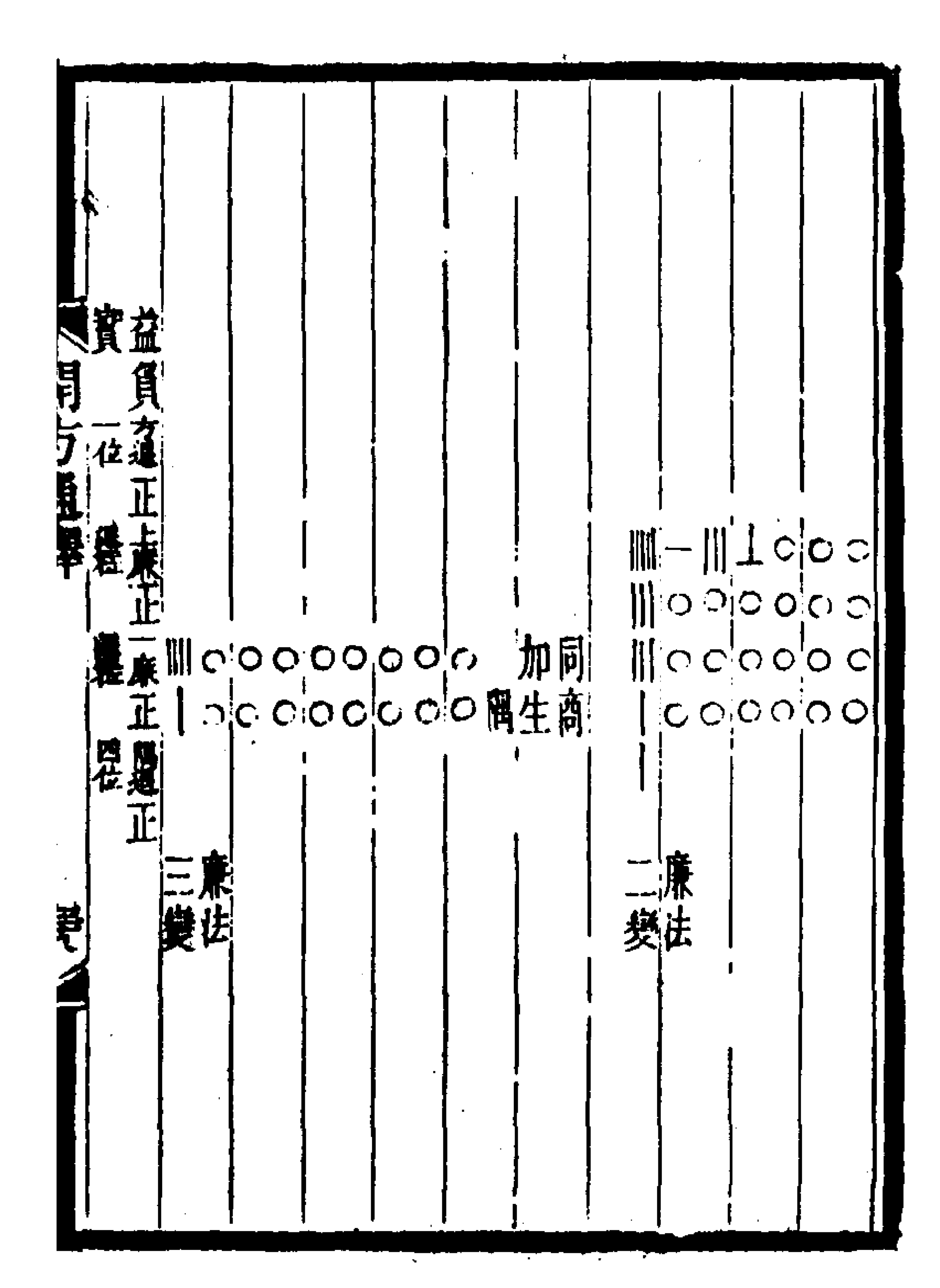
丨

實 方再進位 廉再退位 〇 隅再超位


商得
同加益積
商生方
異消餘負
商生上廉
異消餘正
商生下廉
入下廉
商生隅
方實同名相加
為益實



異消餘正
商生上廉
同加
商生下廉
同加
商生隅
同加
商生下廉
同加
商生隅
廉泆
一變



廉法
二變
同商
加生
隅
廉法
三變
益負方遇正正上廉正正一廉正正隅遇正
實
一位
四位

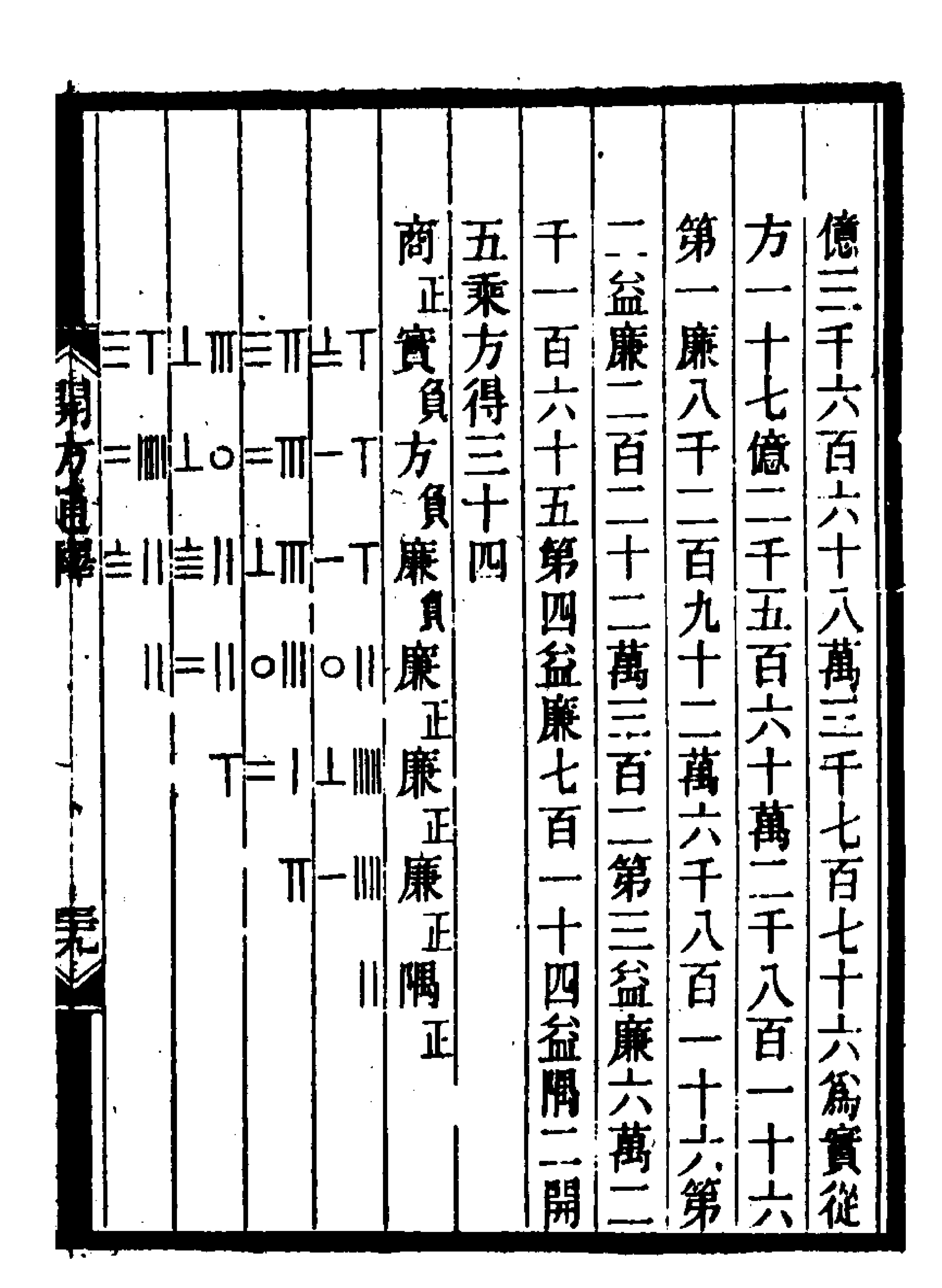
開方…表

積商 二

左	式	右
	異減實盡	4628760
36246600	商生方	
28148800	同加	16146800
11942000	商生上廉	
4976000	同加	4136000
940000	商生下廉	
320000	同加	300000
20000	商生隅	
		10000

又明重前第二草又法相消得下式五百一十三

億三千六百六十八萬三千七百七十六爲實從方一十七億二千五百六十萬二千八百一十六第一廉八千二百九十二萬六千八百一十六第二益廉二百二十二萬三百二第三益廉六萬二千一百六十五第四益廉七百一十四益隅二開五乘方得三十四



商　實正　方負　廉負　廉負　廉正　廉正　廉正　隅正

𝍤𝍩𝍢

𝍩𝍦

實	𝍤𝍩𝍢𝍫𝍥𝍮𝍧𝍫𝍦𝍯𝍥
方超一位	𝍠𝍯𝍡𝍬𝍥〇𝍡𝍯𝍠𝍮〇
廉超一位	𝍯𝍡𝍰𝍡𝍮𝍧𝍩𝍥〇〇
廉超二位	𝍪𝍡𝍪〇𝍫〇𝍪〇〇〇
廉超三位	𝍥𝍪𝍠𝍮𝍣〇〇〇〇
廉超四位	𝍯𝍠𝍫〇〇〇〇〇
隅超五位	𝍡〇〇〇〇〇〇

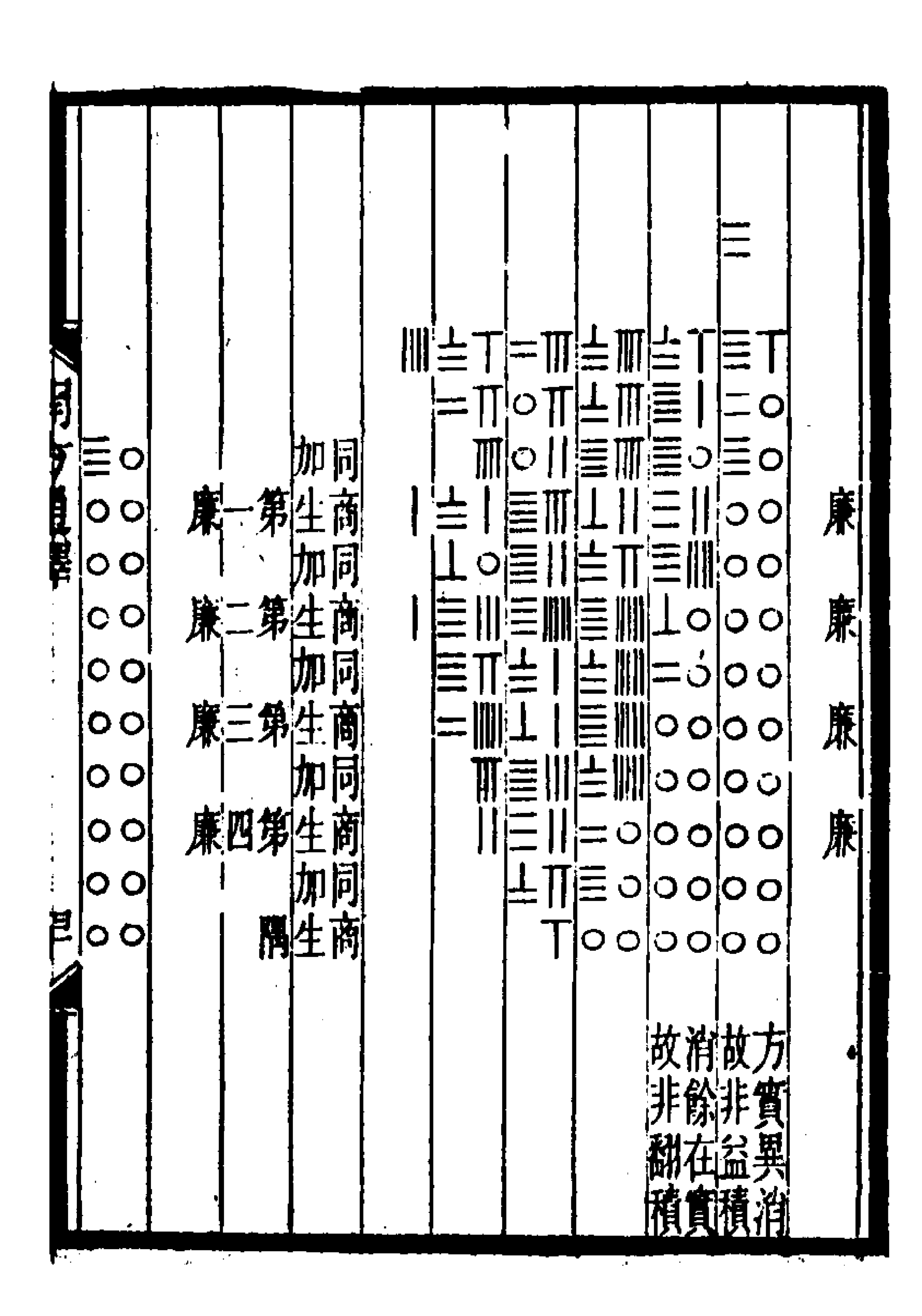
商得

異商異商異商同商同商同商

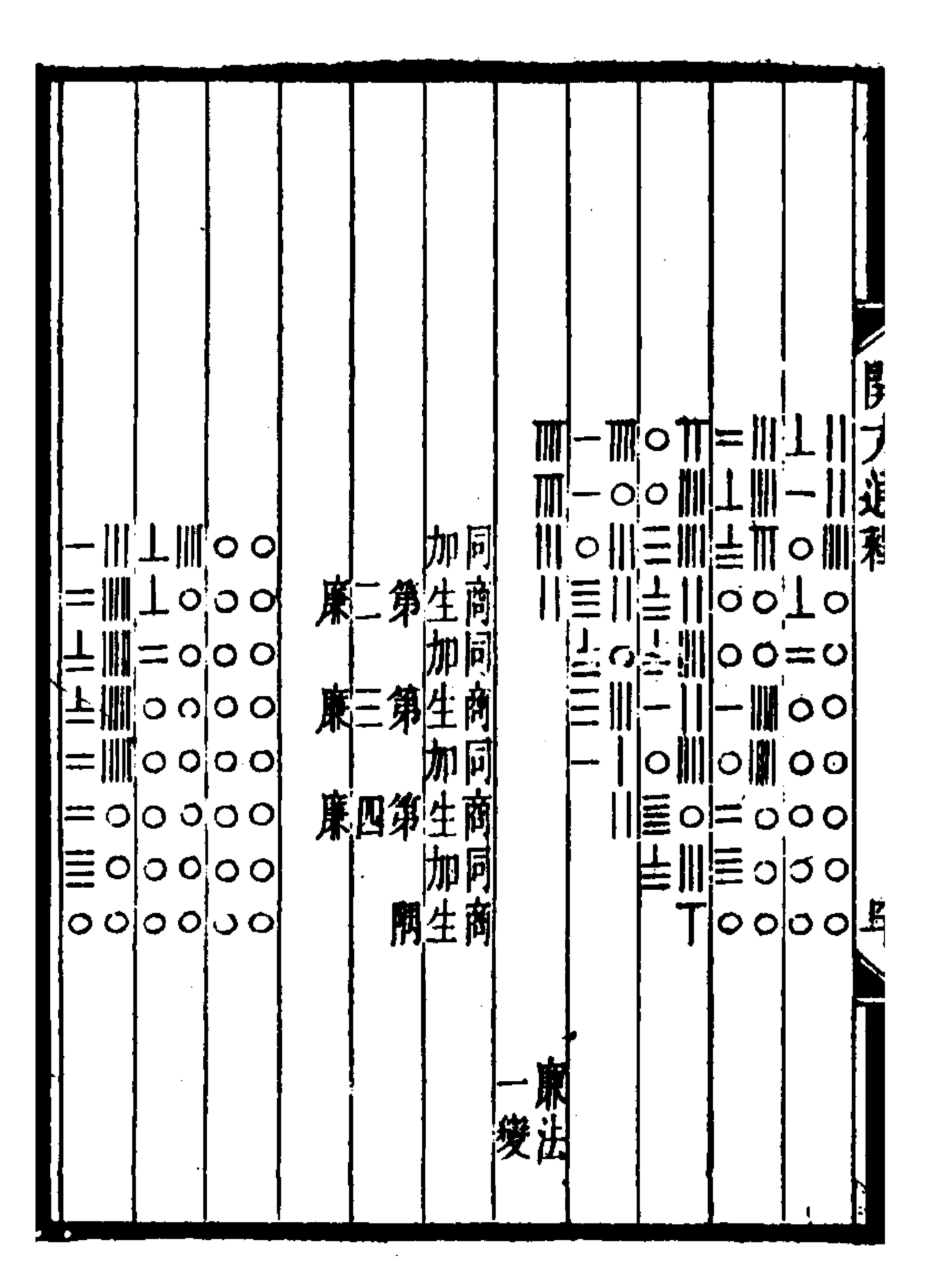
消生消生消生加生加生加生

餘方餘第餘第第第隅

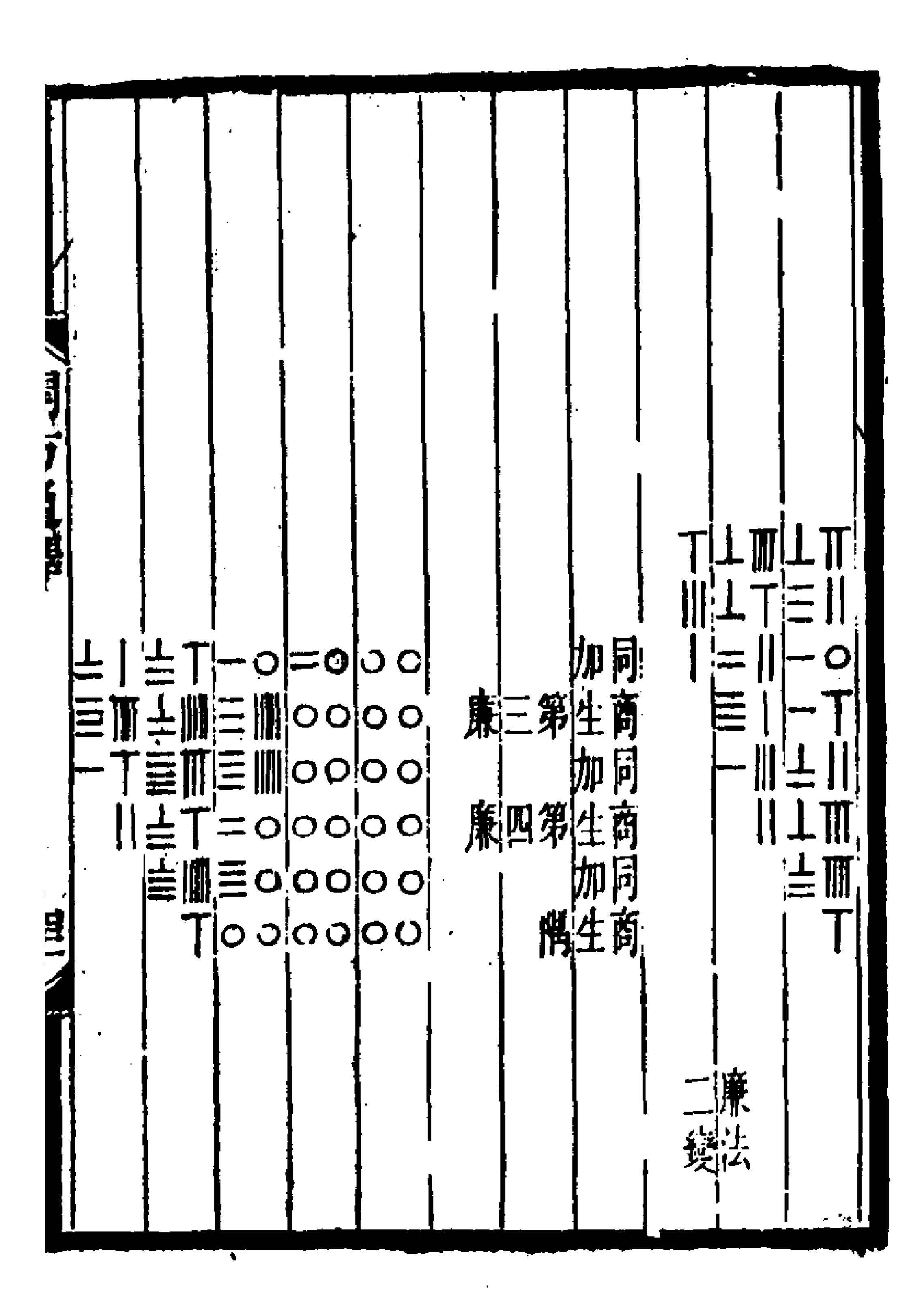
負正一正二三四



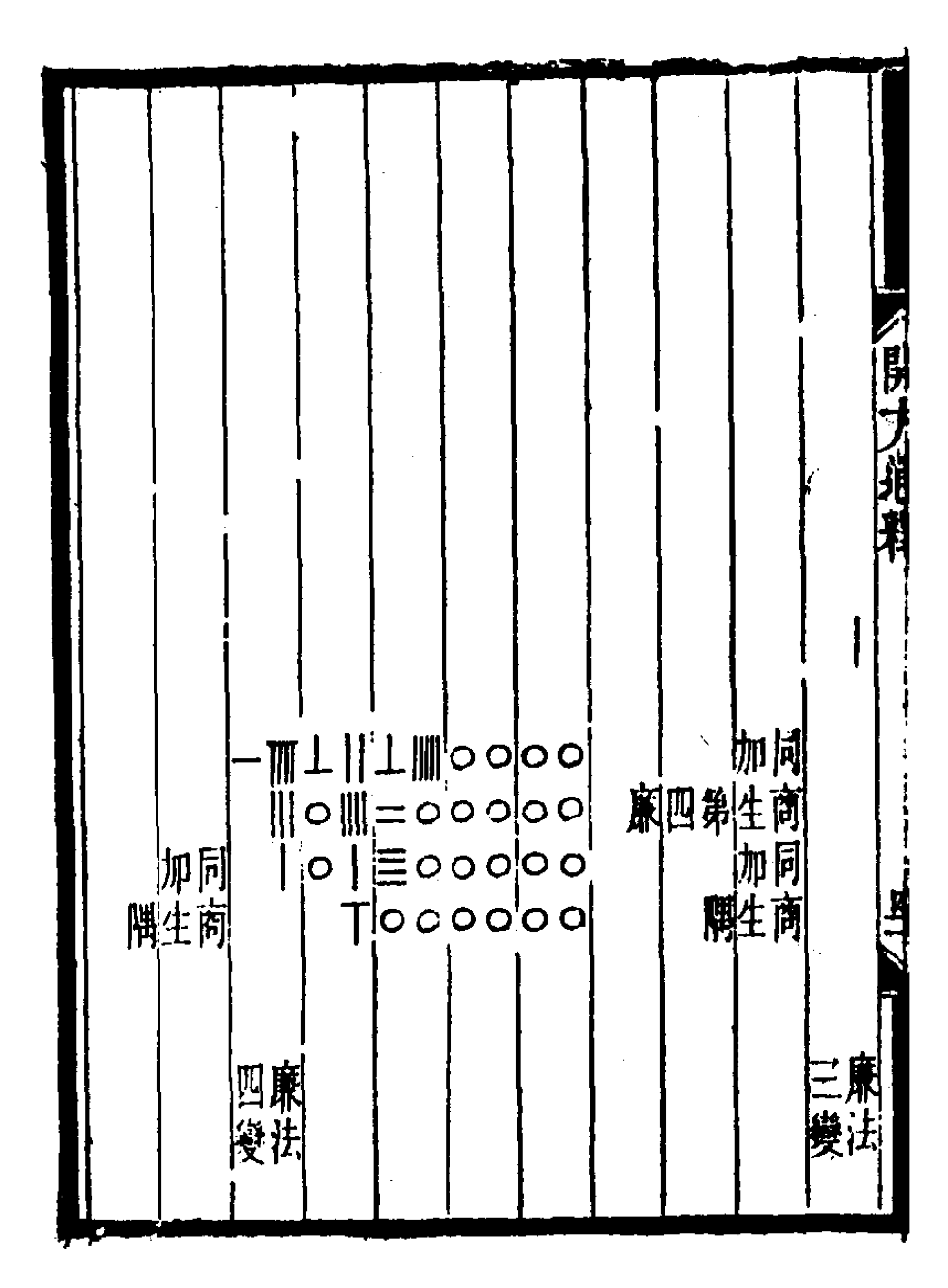
廉
廉
廉
廉
方實異消故非益積
消餘在實故非翻積
同商加生第一廉
同商加生第二廉
同商加生第三廉
同商加生第四廉
同商加生隅

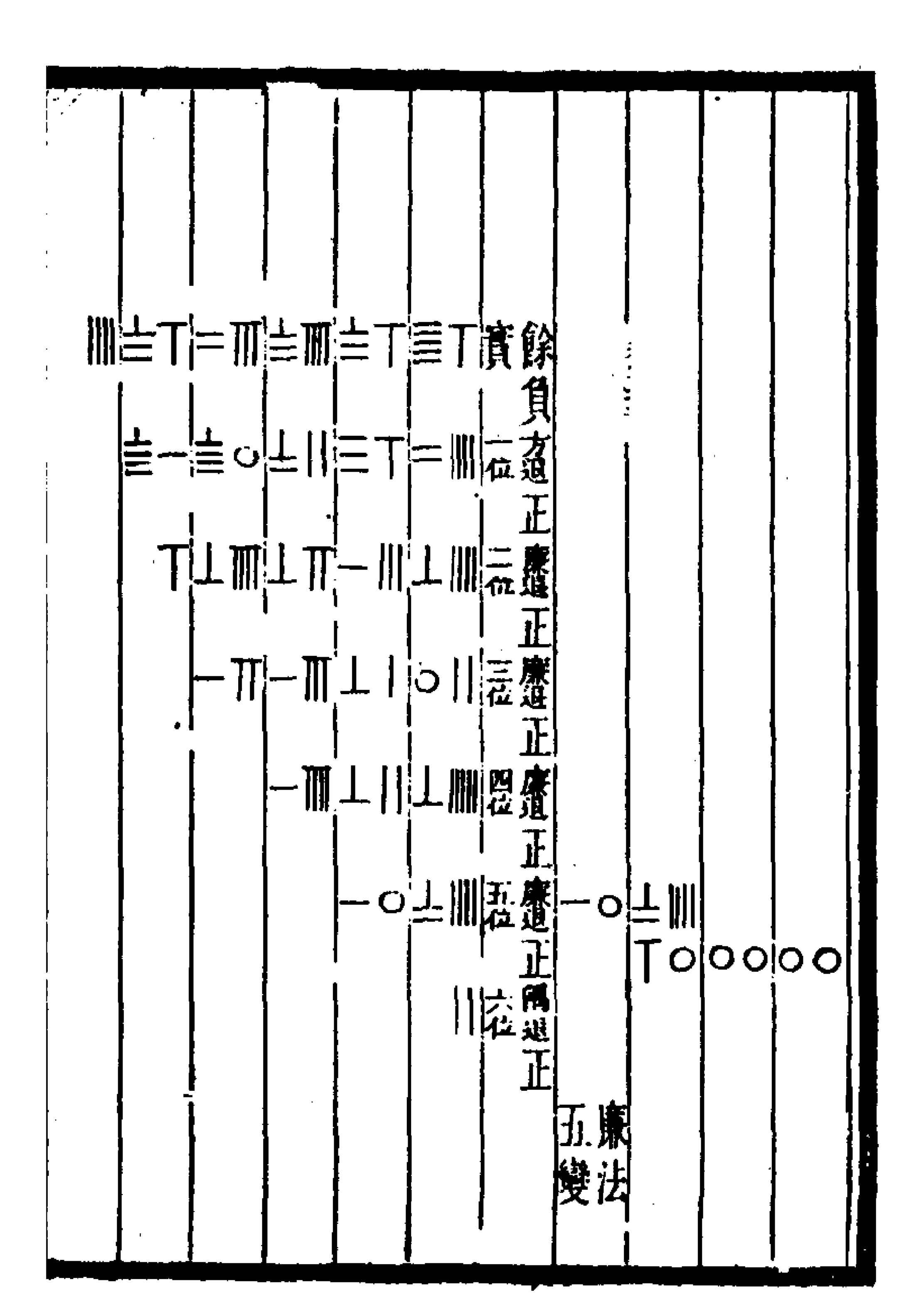


廉法
一變
同加
商生第二廉
同加
商生第三廉
同加
商生第四廉
同加
商生隅



同商
加生
同商
加生
第三
廉
同商
加生
第四
廉
同商
加生
隅
廉法


廉法
三變
同商
加生
同商
加生
第四
廉
同商
加生
隅
廉法
四變
同商
加生
隅



廉法
五變
餘實
負方退正
一位
廉退正
二位
廉退正
三位
廉退正
四位
廉退正
五位
隅退正
六位

續商

異商同商同商同商同商

消生加生加生加生加生

實盡

方

第一廉

第二廉

第三廉

第四廉

隅

6	3	6	7	4	7	7	2	6	7	4
4	6	6	3	2	2	7	3	1	2	1
0	3	0	1	0	3	6	6	8	2	
0	6	2	3	2	6	1	3	7		
6	8	8	3	4	8	1	7			
4	6	4	7	8	7	7	1			
2	6	3	2	0	8					
3	8	4	0	0	2					
8	2	3	3							
2	8	0	1							
8										

益古演段第二十四問消得積一千四百四十九

從方一百八益隅一個七分半倒積倒從開平方

得四十二

商正實負方正隅負

〇〇𝍨𝍪𝍫一
〇〇𝍨〇丨
𝍫𝍭丨

實 〇〇𝍨𝍪𝍫一
方遞二位 〇〇〇𝍲〇一
隅遞二位 〇〇𝍫𝍲

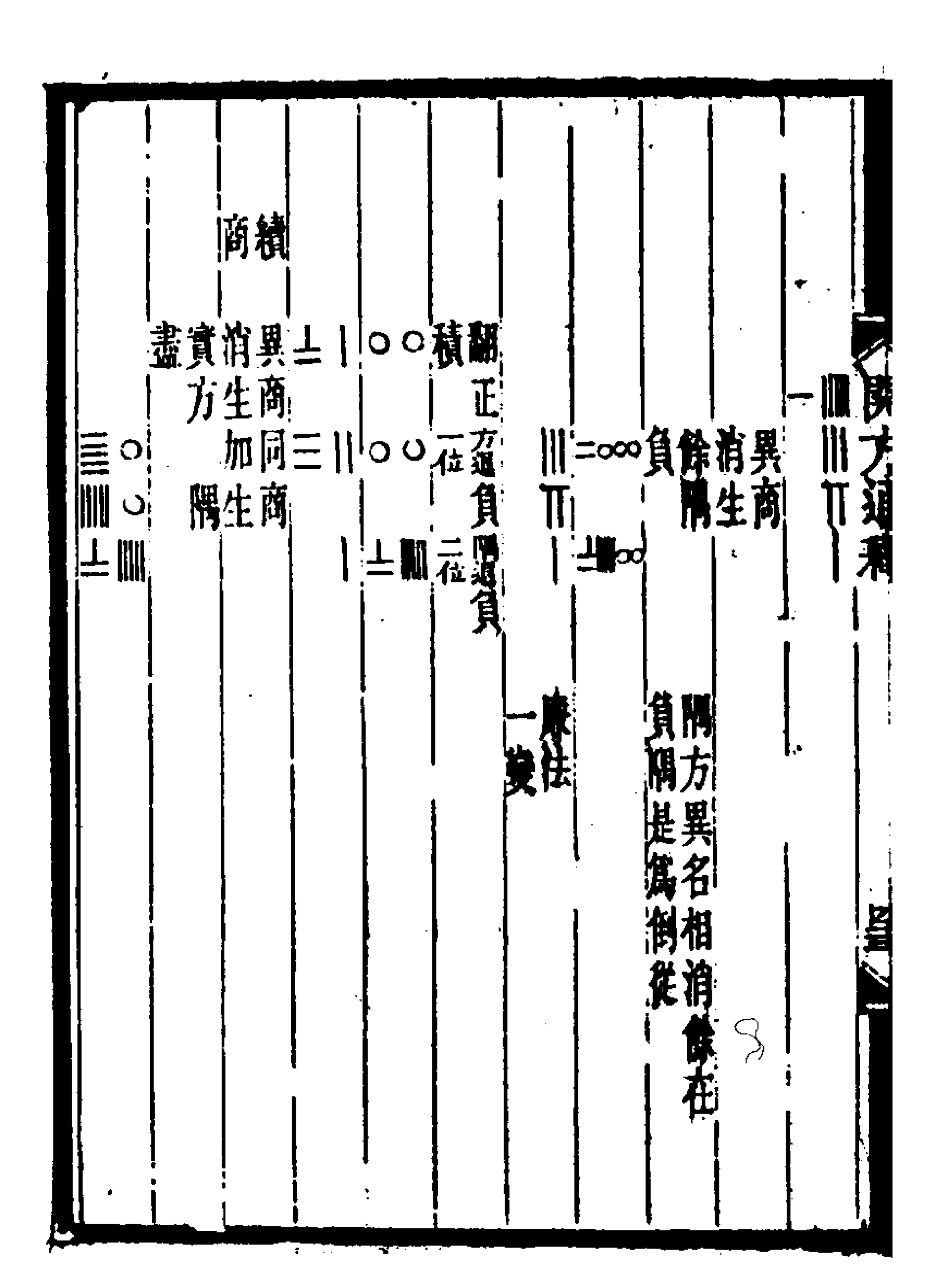
商異消生異商
商異消生異商

得商

餘方 正〇〇𝍲𝍡
餘隅 正〇〇𝍲𝍡

方實異名相消餘在
方是為倒積即翻積

𝍫



開方通釋

異商
消生
餘隅
負
隅方異名相消餘在
負隅是爲倒從

廉法
一次

翻積
正方適負隅適負

續商
異商
消生方
實盡
同商
生隅
加

‖ ⊥≡ ‖‖‖ ||| |

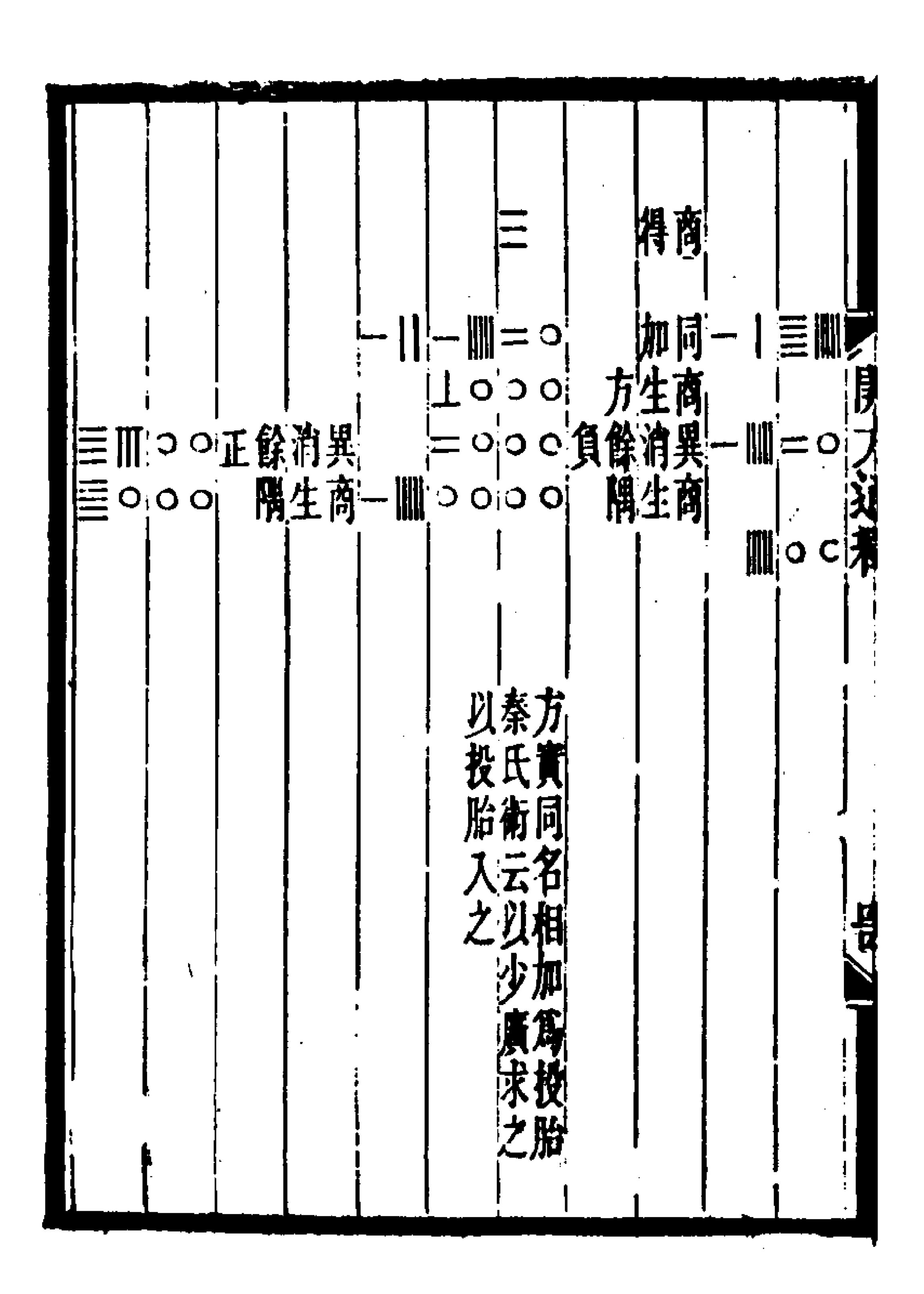
秦道古數學九章古池推原法草云一萬一千五百五十二寸爲實一百五十二寸爲益方半寸爲從隅開投胎平方得三丈六尺六寸四百二十九分寸之四百一十二

商正 實負 方負 隅正

實 一|≡‖‖‖=〇
方 一‖‖‖=〇
隅 ‖‖‖‖

此式方正隅負而題中稱益方從隅可見益常爲負從常爲正之例秦氏亦不拘

實 方再進位 隅再超位
〇=
〇〇
〇〇



商得
同加
商生方
異消餘負
商生隅
異消餘正
商生隅
方實同名相加爲投胎
秦氏術云以少廣求之
以投胎入之

次商廉

法一變

益積負方通正隅通正

實　一位　二位

續商　丄

異商同商

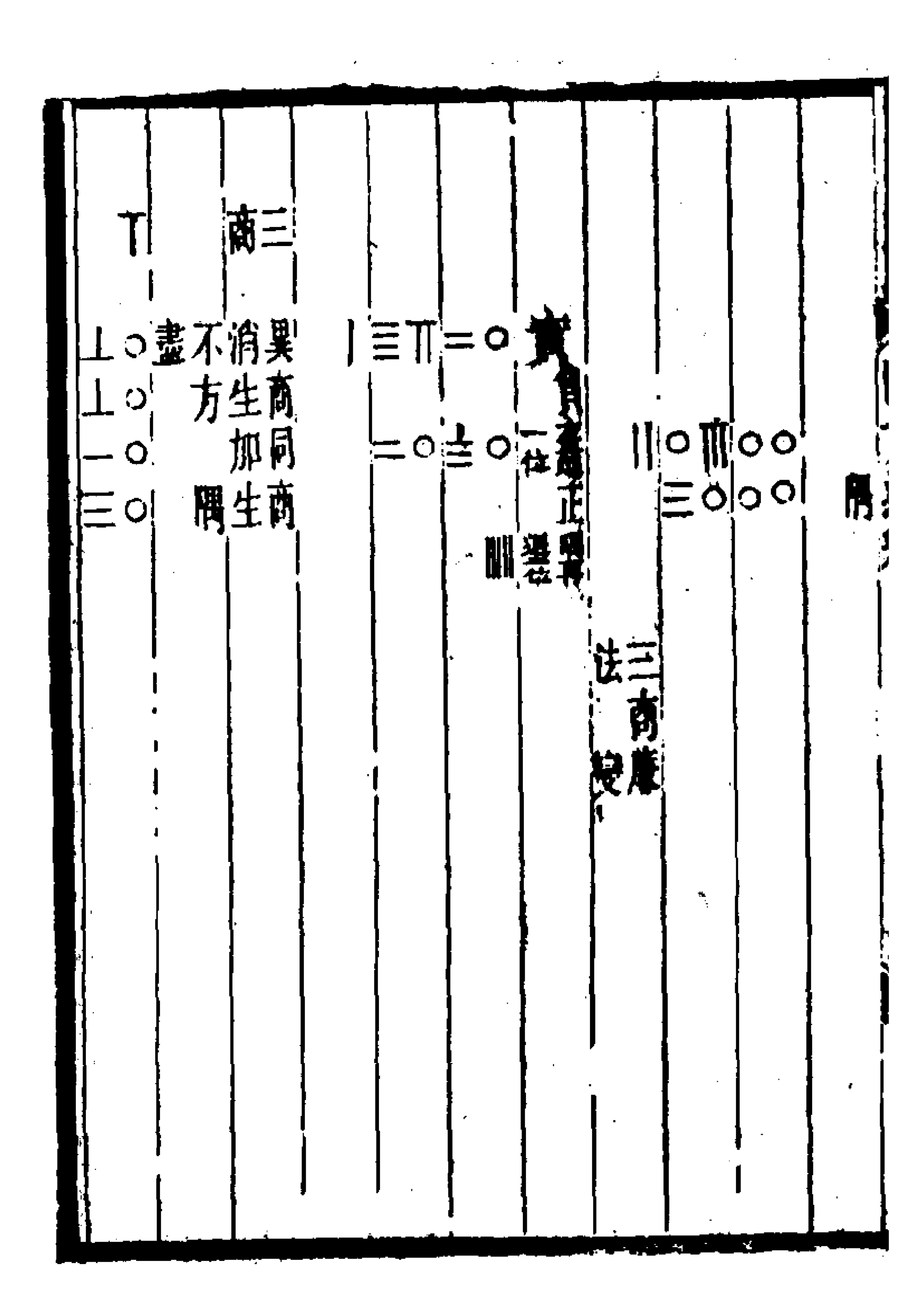
消生加生

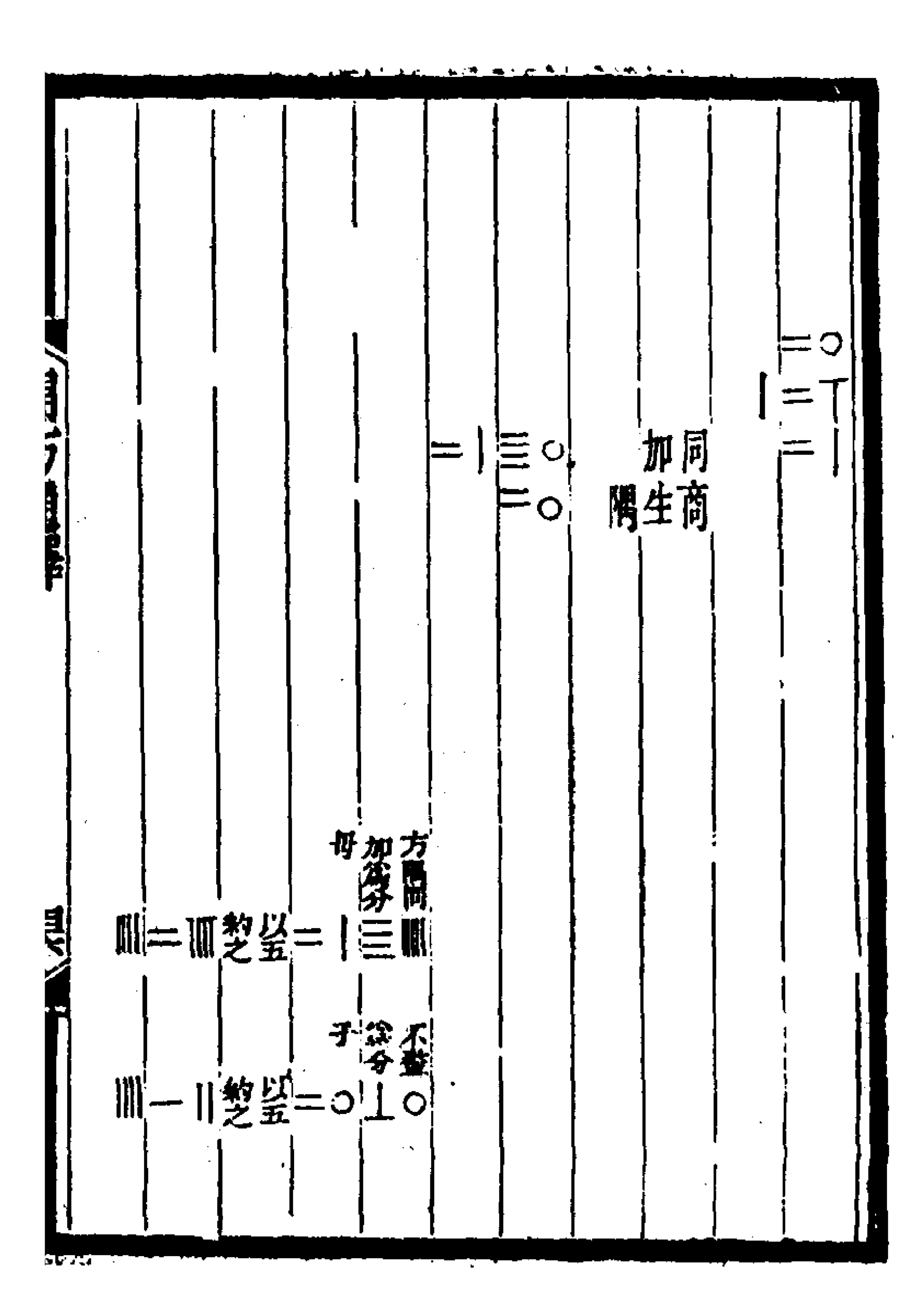
餘方隅

負

同商

加生




同商
加生隅
方隅同
加為分母
以五約之
不盡
為分子
以五約之

又尖田求積術草云四百六億四千二百五十六萬爲實七十六萬三千二百爲從上廉一爲益隅開玲瓏翻法三乘方步法得八百四十步

商正 實負 方空 廉正 廉空 隅負

||||○T≡||≣T○○○○

⊥T三||○○

|

實

上廉再超一位

隅再超一位

初商 |||

|||| 〇 T 三 || 亖 T 〇 〇 〇 〇

異消餘正 ||| 三 ||| 〇 〇 〇 〇 〇 〇

商生方 〇 〇 〇 〇 〇 〇 〇 〇

入方 〇 〇 〇 〇 〇 〇 〇 〇

商生上廉 〇 [illegible] 〇 〇 〇 〇

⊥ T 三 || 〇 〇 〇 〇 〇 〇

異消餘正 〇 [illegible] 〇 〇 〇 〇

商生下廉 〇 〇 〇 〇 〇 〇 〇

入下廉 〇 〇 〇 〇 〇 〇 〇

商生隅 〇 〇 〇 〇 〇 〇 〇

| 〇 〇 〇 〇 〇 〇 〇 〇

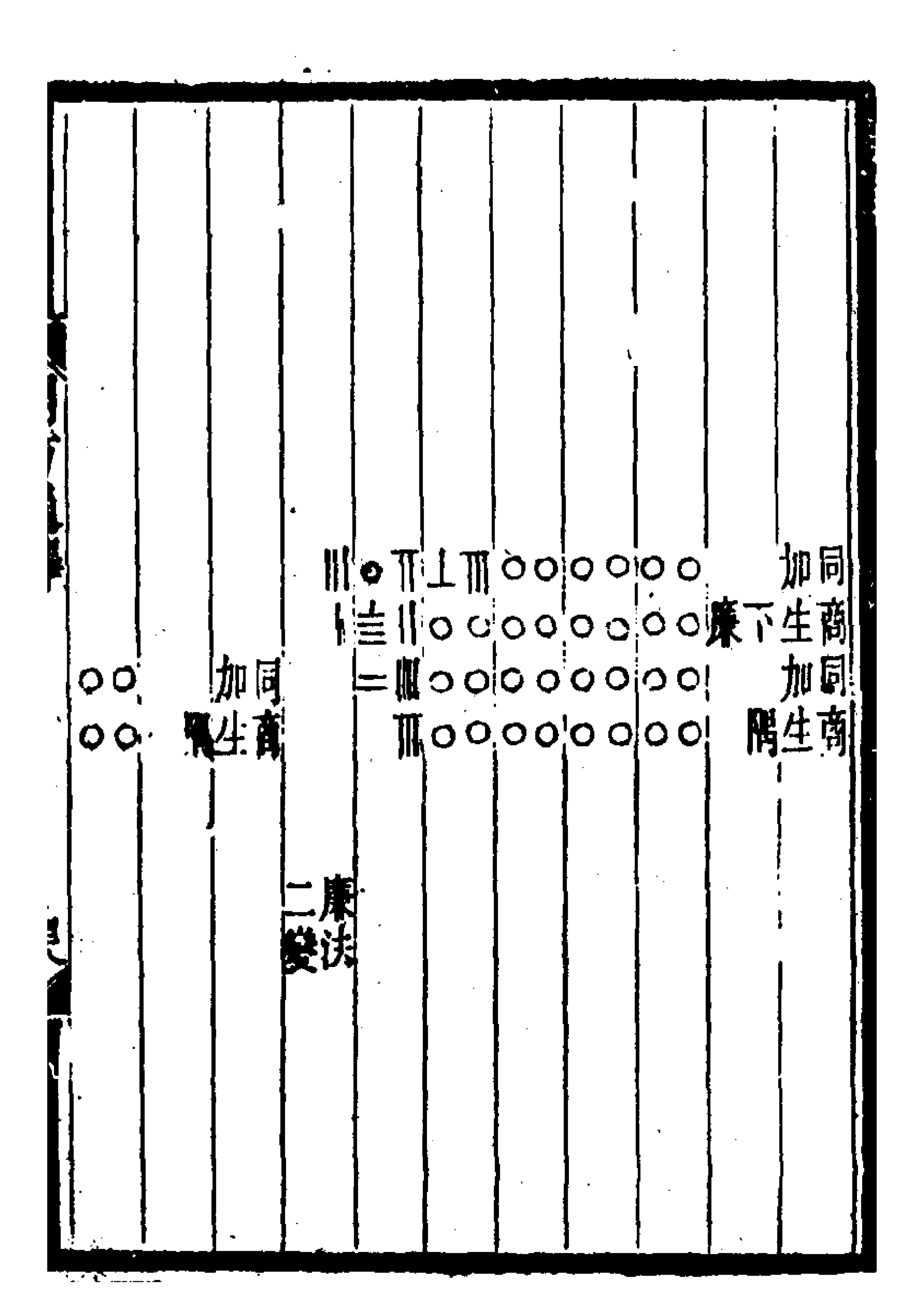
𝍢𝍯𝍡〇𝍣
𝍦𝍯𝍧𝍫𝍧
𝍰𝍧𝍫𝍥
𝍰𝍧𝍫𝍥
𝍩𝍡𝍫𝍡
𝍮𝍣〇〇
𝍧〇〇
𝍧〇〇

方實異名相消

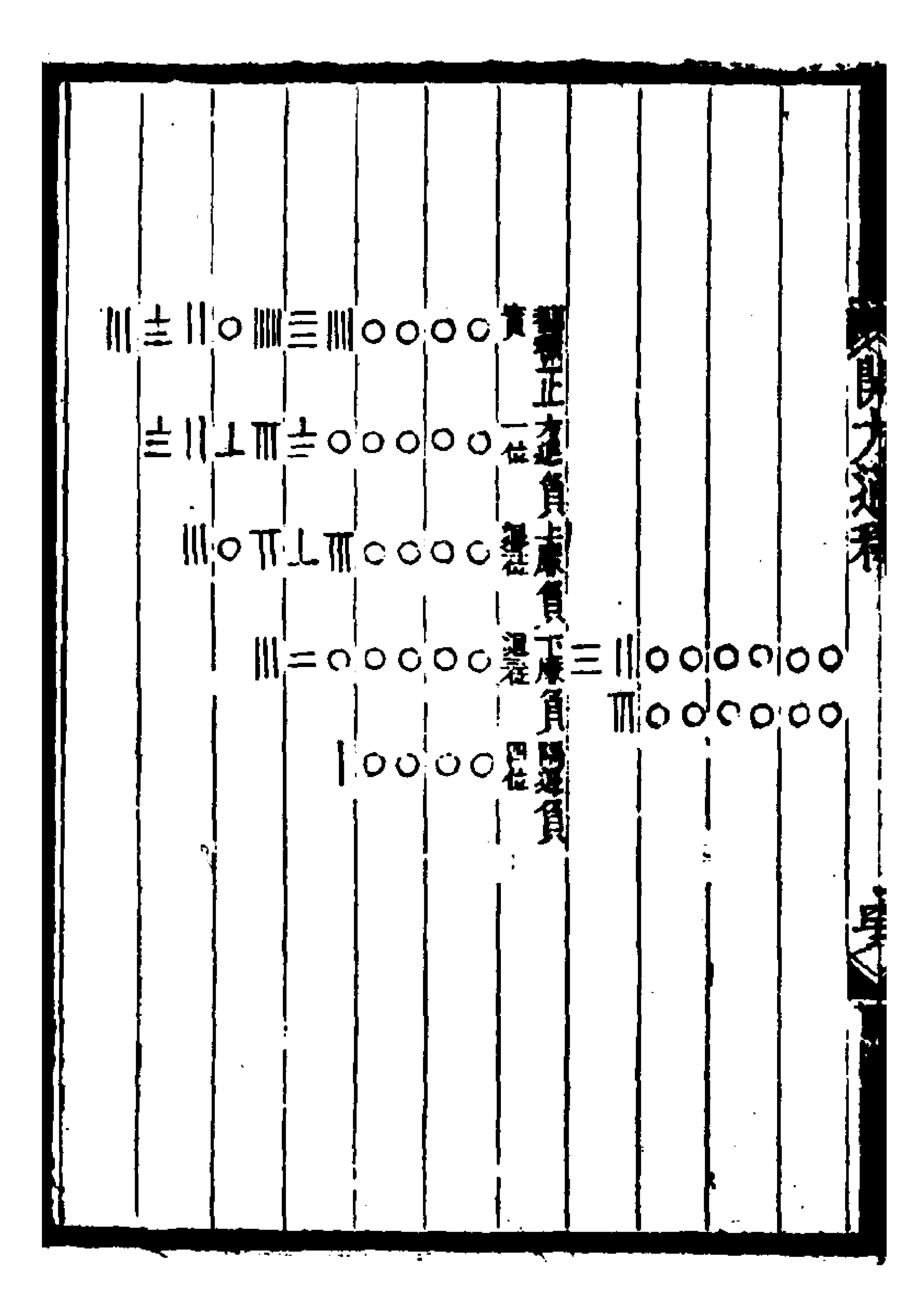
餘在方爲換骨

異消餘負	𝍧𝍪𝍥𝍰𝍧〇〇〇〇〇〇
商生上廉	𝍨𝍪𝍣𝍫𝍣〇〇〇〇〇〇
異消餘負	𝍠𝍩𝍣𝍮𝍧〇〇〇〇〇〇
商生下廉	𝍠𝍪𝍧〇〇〇〇〇〇〇〇
同加	𝍩𝍥〇〇〇〇〇〇〇〇
商生隅	𝍧〇〇〇〇〇〇〇〇

廉法一變



同商加生
商下生廉
同加
商生隅
同加
商生隅
康法
二變


翻積正方廉負上廉負下廉負隅廉負
實
一位
二位
三位
四位

續商

異商	消生	實盡	〇	〇	〇	〇							
商	生	方	〇	〇	〇	〇	‖‖	三	‖‖	〇	‖	⊥三	‖‖‖
同	加		〇	〇	〇	〇	丅	三	|	三	‖‖	⊥三	
商	生	上廉	〇	〇	〇	〇	丅	三	‖	⊥三	‖	一	
同	加		〇	〇	〇	〇	‖‖	丄	〇	二	‖‖‖		
商	生	下廉	〇	〇	〇	〇	丅	⊥三	‖	一			
同	加		〇	〇	〇	〇	‖‖	二	‖‖‖				
商	生	隅	〇	〇	〇	〇	‖‖						

三

秦道古又有開連枝平方法蓋卽帶分開方前所推數學九章古池推原法是也益古演段第四十問分別之分天元一術及連枝同體術最詳與道

古可以互証之分天元一者所知數中帶有零分不便立天元一始以分母通之既相消開方後以分母約之是也詳見天元一釋連枝同體者隅多而開方不盡以隅數乘實而變隅爲一開方後以原數約之是也并錄其術于左以備參考

之分天元一術云今有直田一段中心有圓池外計地四畝五十三步長濶和七十六步太半步田四角至池十八步問池徑外田徑立天元一爲三個池徑以自之得太〇丨加十二段見積得[illegible]〇丨爲十二段直積又身外加五爲十八段直積於頭列和步七十六步太通分內子得二百三十自之

爲和冪九段內減頭位得[illegible]○[illegible]爲九段斜冪寄

左再置天元圓徑加六之角至步一百八得[illegible]

爲三個田斜自之得[illegible]亦爲九段斜冪與寄

左相消得[illegible]開平方得六十二步爲三個圓

池徑以三約之得一個圓徑二十步三分之二循

案此題長濶和七十六步太半步太半步者三分

之二也有此奇零不便乘除故以分母三通七十

六步太半步爲二百三十也旣通爲三倍則立天

元一遂當圓徑三也爲圓徑者三故乘爲徑冪九

方之於圓三之四而一故九方冪當十二圓冪也

圓冪池也見冪外計地四畝五十三步也畝法二

百四十故化爲一千一十三也直積勾股積也池積加見積是成勾股積矣天元冪一個當直積十二半個則六矣故加五爲十八也和冪爲四勾股積一勾股較冪斜弦冪爲二勾股積一勾股較冪故以九和冪減十八個勾股積餘十八個勾股積九個較冪適當弦冪九也天元丨既當三圓徑故必六其角步之十八以加之乃得三弦數自之亦是九弦冪也求一而得三故開方後又必報除也

連枝同體術云立天元一爲內池徑加倍角至步三十六得Ⅲ太丨爲直田斜自之得Ⅲ太亖Ⅱ丨爲田斜冪又九之得下式丅Ⅲ一Ⅲ Ⅲ爲十八積九較冪寄左

列和步七十六八步太通分納子得[illegible]以自之得五
萬二千九百步為九段和冪于頭又置天元圓徑
以自之又三之四而一得[illegible]元[illegible]為一段圓積也加
入見積一千一十三步得[illegible]。[illegible]共為直積一段
又十八之得[illegible]。[illegible]為十八段直積以減頭位得
[illegible]。[illegible]亦為九段田斜冪與寄左相消得[illegible][illegible]
合以平方開之今不可開先以隅法二十二步半
乘實二萬三千單二步得五十一萬七千五百四
十五步正為實元從六百四十八負依舊為從一
益隅平方開之得四百六十五步以元隅二十二
步半約之得二十步三分之二為內池徑循按圖

體連枝爲隅數多者設也秦氏連枝法即古開方約分法古法倍得數加隅爲分母所餘實爲分子見加減乘除釋秦氏以商生隅入廉加隅爲分母所餘實爲分子又以隅數約之者爲隅數之不止於一也是法爲連枝之常法李欒城緣隅數之多而有同體連枝連枝之約分不可以定母數同體連枝之約分則可以定母數盡開方之術凡隅之多者以其數乘積而化隅爲一旣開得數以原隅數約之與原數原積開方數同此一例也凡隅之多者開有帶分不能盡以分母乘積數而開之則能盡此又一例也試以欒城之法演之積二萬三千單二

步負從六百四十八負隅二十二叉五商得二十從進一隅超一以商生隅爲四千五百入從同加爲一萬九百八十叉以商生之爲二萬一千九百六十入積異消餘一千四十二爲次商積乃變初商以商生隅爲四千五百入從同加爲一萬五千四百六十爲廉法于是廉一退爲一千五百四十六隅再退爲二十二五廉法已多於積商一猶盈必闕之必以此爲空位而更退位退從爲一百五十四六退隅爲二步二五商得六生隅爲一步三五入從同加爲一百五十六步一五叉以商生之爲九百三十六步六入積異消餘一百五步四爲

四商積更開之仍得六仍不可盡故築城以爲不可開也用連枝同體術開得四百六十五步是不可開變而爲可開也後一例之證也因以二十二步半除之得二十步是除去四百五十步尙餘一十五步此一十五步當二十二步半爲不足不可得一故約爲三分之二耳必除之亦必存空位亦除得六去積一十三步半仍餘一五是爲六不盡所得二六六不盡與原隅原積開方數同前一例之證也開之不盡用同體連枝術則盡者其天元爲三分之二不盡者也今隅有三則爲三分之二者三爲三分之二者三是六矣六則盡矣然是形

長六濶仍三分之二欲得其濶仍爲不盡惟又以三乘之則長濶皆六矣大抵三不盡者三倍之則盡六不盡者六倍之則盡九不盡者九倍之則盡由是推之不獨多隅者可用此術卽一隅者用分母再乘可也不獨以分母再乘也卽倍分母幾倍分母幾十倍分母以再乘之可也此一二二五之一五者是以六七五乘三之二也故二二一五不盡以二二五乘之而盡同一不盡而所謂三分之二所謂一十二分半之一十五分母分子俱實有此數此李氏同體連枝法異於秦氏之連枝法也

甘泉徐鳳誥校算